N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Informatique"

par

Françoise REYNAUD GAROCHE

—o—

THEORIE DES ECOULEMENTS DANS LES RESEAUX

—o—

Thèse soutenue le 19 Juin 1973 devant la commission d'examen

President : Monsieur J. Kuntzmann

Examinateurs : Madame G. Saucier

Messieurs C. Benzaken

C.F. Picard

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544319_0053

N° d'ordre

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Informatique"

par

Françoise REYNAUD GAROCHE

—o—

THEORIE DES ECOULEMENTS DANS LES RESEAUX

—o—

Thèse soutenue le 19 Juin 1973 devant la commission d'examen

President : Monsieur J. Kuntzmann

Examinateurs : Madame G. Saucier
Messieurs C. Benzaken
C.F. Picard

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à :

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, Directeur de l'ENSIMAG, qui a couvert ce travail de son autorité bienveillante et m'a permis de le mener à bien.

Je suis particulièrement sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury.

Je remercie vivement

Monsieur le Professeur PICARD, Directeur de recherche au C.N.R.S.

Madame G. SAUCIER, Maître de Conférences à l'ENSIMAG, et

Monsieur C. BENZAKEN, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble, qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Enfin, je remercie Monsieur RASOLONJATOVO, pour la patience et le goût qu'il a manifesté dans la réalisation des nombreux dessins, Mademoiselle BICAIS et Madame NEUMANN, qui ont produit un texte soigné, et le service de tirage qui a assuré la délicate réalisation de ce document.

PLAN D'ENSEMBLE

SIMPLIFICATION D'UN GRAPHE PAR SUPPRESSION OU CONTRACTION D'ARCS

GRAPHES ORIENTES SANS CIRCUIT : OPERATIONS ET ECOULEMENTS

TREILLIS DES ECOULEMENTS

APPLICATIONS

PLAN DETAILLE

CHAPITRE -I-

SIMPLIFICATION D'UN GRAPHE PAR SUPPRESSION OU CONTRACTION D'ARCS

I - Rappels et définitions

I - 1 Rappels sur les graphes

I - 2 Définition de la suppression et de la contraction d'arcs

I - 3 Treillis de Boole défini sur les arcs d'un graphe

II - Simplification d'un graphe avec contrainte sur les demi-degrés

II - 1 Suppression d'arcs

II.1.1. Effet sur les 1/2 degrés de la suppression d'arcs

II.1.2. Compatibilité des suppressions

II.1.3. Files compatibles maximales et graphes minimaux

II.1.4. Problème a)

II - 2 Contraction d'arcs

II.2.1. Contraction de sous graphes connexes disjoints

II.2.2. Cas particulier ; contraction d'un arc

II.2.3. Cas où l'on peut réaliser une suite de contractions d'arcs sans abaissement intermédiaire des demi-degrés

II.2.4. On impose la condition supplémentaire : les 1/2 degrés ne dépassent pas une valeur n fixée

III - Simplification d'un graphe avec contrainte sur les circuits

III - 1 Suppression d'arcs

III - 2 Contraction d'arcs

III.2.1. Cas où les contractions ne détruisent pas de circuits

III.2.1.1. Arc d-contractable

III.2.1.2. Effet de la contraction d'arcs d-contractables sur les autres arcs

III.2.1.3. Suite de contractions d'arcs d_contractables

III.2.2. Cas où les contractions ne créent pas de circuits

III.2.2.1. Arc c_contractables

III.2.2.2. Effets de la contraction d'arcs c_contractables sur les autres arcs

III.2.2.3. Suites de contractions d'arcs c contractables

CHAPITRE - II -

GRAPHES ORIENTES SANS CIRCUITS : OPERATIONS ET ECOULEMENTS

1. Opérations dans un graphe

   1.1. Suppression d'arcs
   1.2. Contraction d'arcs
   1.3. Réduction
   1.4. Mise en série ou en parallèle : graphe (pseudo) série parallèle
   1.5. Fusion du bord
   1.6. Réduction totale

2. Ecoulement entre source et puits

   2.1. Ecoulements : définition
   2.2. Union d'écoulements
   2.3. Condition pour que 2 puis p rivières forment un écoulement
   2.4. Intersection d'écoulements
   2.5. Support d'un écoulement
   2.6. Treillis des écoulements

3. Effet sur les écoulements de la suppression, de la contraction d'arcs, de la réduction (totale)

   3.1. Suppression d'arcs et écoulements
   3.2. Contraction d'arcs et écoulements
   3.3. Classe de E-équivalence
   3.4. Produit direct de 2 treillis et mise en parallèle de 2 graphes
   3.5. Produit contracté de 2 treillis et mise en série de 2 graphes
   3.6. Treillis des écoulements des graphes série parallèle (généralisés)

CHAPITRE -III-

TREILLIS DES ECOULEMENTS

- Treillis des écoulements : propriétés de T (G)

  1.1. T(G) est fini, donc atomique et coatomique

  1.2. Complémentation

  - T(G) est complémenté
  - T(G) est relativement complémenté
  - graphe de compléments
  - correspondance des compléments

  1.3. Eléments de T(G) irréductibles pour l'union et l'intersection

  - caractérisation des U-irréductibles et $\cap$-irréductibles
  - leurs compléments

  1.4. Chaines maximales de T(G)

  - caractérisation
  - degré de réduction de G

  1.5. Connexité de 2 lignes consécutives de T(G)

- Application : recherche des écoulements d'un graphe

  2.1. Algorithme ascendant dans T(G)

  2.2. Procédure descendante dans T(G)

3.2. Séquence de tests d'un écoulement

3.2.1. Détection

3.2.2. Localisation

CHAPITRE - IV -

APPLICATIONS

1 - Outils de synthèse pour un type de réseaux modulaires

1.1. Fonctions booléennes et matrices associées

1.1.1. Représentation d'une fonction booléenne

1.1.2. Base d'une représentation

1.1.3. Changement de base

1.2. Les réseaux de synthèse Δ n - matrices associées

1.2.1. Définition des réseaux Δ n (20)

1.2.2. Implémentation sur Δ n d'une fonction booléenne suivant le choix de l'opérateur (θ_1) ou (θ_N)

1.2.3. Matrice d'intersection

1.2.4. Compatibilité des monômes canoniques de F. Fonctions synthétisables.

1.3. Un algorithme (20) de synthèse sur Δn présenté avec ses outils.

2 - Quelques classes de fonctions synthétisables

2.1. Quelques caractéristiques du treillis des écoulements de Δ n

2.2. A tout ensemble de fonctions synthétisables sur Δ n avec (θ_N) correspond un ensemble de fonctions synthétisables avec (θ_1) et réciproquement - loi I_θ

2.3. Fonctions à 2 et 3 monômes canoniques

2.4. Les fonctions clés de parité {fn} sont synthétisables avec (θ_N) et les fonctions $I_{\theta-1}$ (fn) avec (θ_1)

2.5. L'ensemble des fonctions symétriques S et leur image I_θ (S)

3 - Test du réseau Δn

3.1. Problème du test

3.1.1. La plaquette

3.1.2. Les différents tests à la fabrication

INTRODUCTION

L'origine de ce travail sur les graphes complètement orientés a été l'étude de l'écoulement de l'information dans un réseau.

A ce propos, nous avons été amenés à chercher une formulation algébrique de certaines opérations sur un graphe (simplification d'un graphe avec contrainte sur les degrés, sans création ou destruction de circuits, opérations sur les treillis des écoulements....).

Ces notions sont liés à des problèmes pratiques d'implantation, de découpage, de testabilité de réseaux.

Dans le chapitre I nous étudions les opérations de suppression et de contraction d'arcs avec les contraintes suivantes :

Ne pas faire croitre les demi-degrés de certains sommets fixés à l'avance au dessus de certaines valeurs.

Ne pas faire décroitre les demi-degrés de certains sommets fixés à l'avance en dessous de certaines valeurs.

Ne pas créer de circuits.

Ne pas détruire de circuits.

Nous fournissons des méthodes booléennes, ou combinatoires pour trouver les suites maximales de suppressions ou de contractions et les graphes minimaux correspondants, ceci pour chacun des problèmes énoncés.

Dans le chapitre II la notion d'écoulement, entre sources et puits d'un graphe sans circuit, est introduite.

Les opérations d'union et d'intersection d'écoulements mettent en évidence la structure en treillis des écoulements d'un graphe.

Les contractions et suppressions d'arcs sont alors utilisées pour simplifier un graphe sans modifier son treillis des écoulements : il s'agit de la réduction d'un graphe.

Ces opérations sont appliquées à la recherche de tous les écoulements d'un graph Nous fournissons à cet effet une procédure descendante dans le treillis des écoulements.

Le chapitre III concerne plus précisément le treillis des écoulements : propriétés, mise en évidence des éléments U irréductibles et $\cap$ irréductible, opérations sur les treillis des écoulements de deux ou plusieurs graphes, treillis des écoulements des graphes série-parallèles, graphes série-parallèles généralisés (c.a.d ayant même treillis d'écoulements qu'un graphe série parallèle), représentant d'une famille de graphes (classes de E-équivalence).

Le chapitre IV est, entre autre, une application de ce qui précède à un certain type de réseaux modulaires : implantation de fonctions booléennes, testabilité du réseau.

CHAPITRE -I-

SIMPLIFICATION D'UN GRAPHE PAR CONTRACTIONS OU SUPPRESSIONS D'ARCS

Le but du chapitre est d'étudier des simplifications d'un graphe complètement orienté, par contraction ou suppression d'arcs, en respectant différentes contraintes.

Dans un premier temps, nous considérons des contraintes sur les demi-degrés d'un graphe en abordant deux problèmes :

Problème a) : ne pas faire décroitre les demi-degrés d'un ensemble de sommets fixés à l'avance en dessous de certaines valeurs, par suppression d'arcs.

Problème b) : ne pas faire croitre les demi-degrés d'un ensemble de sommets au dessus de certaines valeurs.

Dans un second temps, nous imposons les contraintes sur les circuits d'un graphe et abordons trois problèmes :

Problème c) : ne pas détruire de circuits par suppression d'arcs.

Problème d) : même problème pour la contraction d'arcs.

Problème e) : ne pas créer de circuits par contraction d'arcs.

Pour quatre problèmes sur cinq, nous fournissons des méthodes de recherche des suites de contractions ou de suppressions maximales.

I - RAPPELS ET DEFINITIONS

I - 1. Rappels sur les graphes

Nous considérons un graphe complètement orienté G = (X,U) ;

X est l'ensemble des sommets du graphe

U est l'ensemble de ses arcs ; soit x et y dans X : si y est successeur de x dans G, un arc reliant x à y est noté (x,y) ou bien a = (x,y) lorsque les arcs de G sont marqués.

-Un chemin est un ensemble de sommets (ou concaténation d'arcs) ordonnés par la relation de succession ;

Si x_0 est son origine et x_n son extrêmité, (x_0 et x_n étant des éléments de X), on le note $(x_0,\ldots, x_n)$.

Si a_0 est son origine et a_p son extrêmité, (a_0 et a_p étant des éléments de U), on le note $a_0 \ldots a_p$.

-Un puits est un sommet p sans successeur dans G, c'est à dire dont le demi-degré sortant, $d^+(p)$, est nul.

-Une source est un sommet s sans prédécesseur dans G, c'est à dire dont le demi-degré entrant, $d^-(s)$, est nul.

-Un arc-puits est un arc dont l'extrêmité est un puits.

-Un arc-source est un arc dont l'origine est une source.

-Une rivière est un chemin dont l'origine est une source (ou un arc-source) et dont l'extrêmité est un puits (ou un arc-puits).

-La tête d'une rivière r par rapport à un de ses sommets xk, notée Tr (xk) et la queue d'une rivière r par rapport à un de ses sommets xk, notée Qr (xk) sont définies sur la figure suivante :

Tr (xk) = (so,...,xk)

Qr (xk) = (xk,...,po)

I - 2. Définition de la suppression et de la contraction d'arcs

- La suppression d'un arc a de G est l'opération qui consiste à enlever l'arc a du graphe tout en conservant ses extrêmités. La relation de succession étant conservée pour les autres arcs.

Exemple :

$G_{\bar{a}}$ désigne le graphe obtenu à partir de G par suppression de l'arc a.

- La contraction d'un arc a de G est l'opération qui consiste à supprimer l'arc a de G en identifiant ses extrêmités. La relation de succession étant conservée pour les autres arcs.
G_a désigne le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arc a.

Exemple :

Nous préciserons ultérieurement différents marquages du graphe G et des graphes obtenus en effectuant ces opérations.

I - 3. Treillis de Boole défini sur les arcs d'un graphe

- Variable booléenne de support un arc de G : G = (X, U) a U

$\bar{a}$ désigne l'opération qui consiste à supprimer (ou à contracter) l'arc a, c'est à dire la négation de a.

a désigne l'opération qui consiste à garder l'arc a.

Sur ces variables la somme (+) et le produit (.) booléens classiques sont définis.

Les méthodes booléennes proposées dans la suite utiliseront les variables sous leur forme directe.

C'est à dire que les calculs concernant la recherche des graphes minimaux (solutions des problèmes étudiés) seront réalisés en exprimant que pour chacun d'eux un ensemble d'arcs est gardé. Sur les expressions booléennes aboutissant aux résultats, on utilisera les lois de l'algèbre de boole : commutativité, absorption,...etc...

Nous utiliserons, par contre, les variables sous leur forme complémentée ($\bar{a}$) en indice, en distinguant : $\bar{a}$ pour la suppression

$\tilde{a}$ pour la contraction

A Ainsi, la notation $G_{\bar{a}}$ désigne le résultat de la suppression de l'arc a de G

$G_{\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_p}$ est par généralisation obtenu en supprimant de G, successivement les arcs $a_1,\ldots, a_p$.

$G_{\tilde{a}}$ désigne le résultat de la contraction de l'arc a de G, $G_{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_p}$ est obtenu par contractions successives des arcs $a_1,\ldots, a_p$.

II - SIMPLIFICATION D'UN GRAPHE AVEC CONTRAINTES SUR LES DEMI-DEGRES

Soit G = (X,U) un graphe complètement orienté aux arcs et sommets marqués

II - 1. Suppression d'arcs

II - 1.1. Effet sur les demi-degrés de la suppression d'arcs

Par suppression d'arcs les demi-degrés ne peuvent que diminuer.

Soit en effet, un arc a =(i,j) tel que $d^+(i) = p$ et $d^-(j) = q$.

Après suppression de a tous les demi-degrés sont conservés sauf $d^+(i)$ qui vaut p-1 et $d^-(j)$ qui vaut q-1.

On considère une partition Pn de l'ensemble des sommets X du graphe G associée à un entier n fixé et induite par la relation :

$$Rn(x) = \{x \in X \ / \ d^+(x) < n \text{ ou } d^-(x) < n\}$$

Soit $B_{Rn}(x)$ la fonction caractéristique de Rn

$$B_{Rn}(x) = 0 \iff x \in X2,\ X2 \subset X$$

$$B_{Rn}(x) = 1 \iff x \in X1,\ X1 \subset X$$

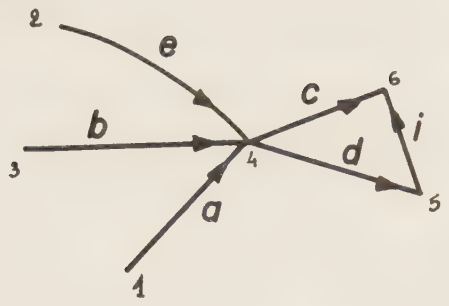
La suppression d'un arc quelconque de G conserve les éléments de X1. Il n'en est pas de même de ceux de X2.

Définition 1 :

Un arc est dit n.suppressible si sa suppression conserve Pn.
Dans le cas où n = 1, l'arc sera dit suppressible

Exemple :

Fixons n = 2



G = (X,U)

P2 = (X_1, X_2)

X_1 = {1,2,3,6,5}

X_2 = {4}

La suppression d'un des arcs a,b,e ou i conserve P2.

Par suppression d'un des arcs c ou d la partition devient :

$P_2' = (X_1', X_2')$

$X_1' = \{1,2,3,6,5,4\}$

$X_2' = \phi$

L'ensemble des arcs 2 supressibles de G est :

K = {a,b,e,i}

Caractérisation d'un arc n-suppressible

Propriété : un arc a = (i,j) est n-suppressible si et seulement si :

$\min (d^+(i), d^-(i)) < n$ ou bien $d^+(i) > n$

et $\min (d^+(j), d^-(j)) < n$ ou bien $d^-(j) > n$

Parmi les arcs n-suppressibles d'un graphe G on distingue les arcs :

- incidents à deux éléments de X_1, dits n-suppressibles de 1ère espèce.
- incidents à au moins un élément de X_2, dits n-suppressibles de 2e espèce.

II-1-2 - COMPATIBILITE DES SUPPRESSIONS

Considérons deux relations internes à l'univers U des arcs de G : la relation unaire de suppressibilité, aS :

a est n.suppressible dans G (on distingue aS_1 (resp. aS_2) : a est n.suppressible de 1ère espère (resp. de 2nde espèce))

la relation binaire de compatibilité, abC :

b est n-suppressible dans G puis a est n-suppressible dans G privé de b.

Propriétés de ces relations

Propriété 1

$$aS_1 \text{ et } bS \Rightarrow abC \text{ et } baC$$

Par définition d'un arc n-suppressible de 1ère espèce, il est clair que la suppression d'un arc n-suppressible, a, conserve les arcs n-suppressible de 1ère espèce (sauf a éventuellement), ce qui se traduit par :

$$aS_1 \text{ et } bS \Rightarrow abC$$

Réciproquement la suppression d'un arc, a, n-suppressible de 1ère espèce conserve les arcs n-suppressibles (sauf a) d'où :

$$aS_1 \text{ et } bS \Rightarrow baC$$

c.q.f.d.

Corollaire

La suppression d'un arc n-suppressible crée au plus 2n arcs non n-suppressible.

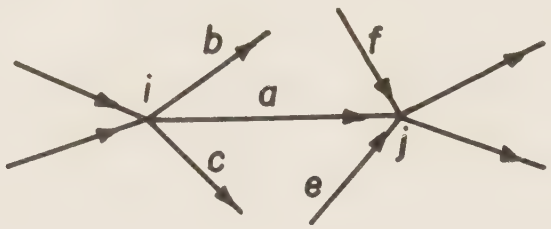
D'après la propriété 1, seule la suppression d'un arc n-suppressible de 2nde espèce peut créer des arcs non n-suppressibles. Le maximum d'arcs ainsi créés est atteint pour un arc a = (i,j) tel que :

$$d^+(i) = n+1 \text{ et } d^-(j) = n+1$$

Par suppression de a, n arcs non n-suppressibles sont crées en chaque extrêmité de a ; au total 2n arcs non n-suppressibles au plus sont crées.

Exemple :

n = 2



$i \in X_2$ { La suppression de a rend b, c, f, e non-suppressibles
$j \in X_2$ { alors qu'ils l'étaient avant.

Propriété 2

abC => aS

La partition Pn des sommets de G est conservée par suppression de b puis de a, elle est donc conservée par la suppression de a seulement, car les deux suppressions conduisent au même graphe, quelque soit l'ordre dans lequel on les effectue.

c.q.f.d.

Corollaire 1

La suppression d'un arc n-suppressible conserve les arcs non n-suppressible.

Corollaire 2

La compatibilité est symétrique

$$abC = baC$$

Démonstration :

C'est évident si a et b n'ont pas de sommet commun.

Sinon supposons qu'on puisse trouver a et b tels que :

abC et non (baC)

On sait que abC => aS (propriété 2), la négation de baC se réduit à: b non suppressible dans G privé de a.

abC => bS (par définition)

bS, aS et non (baC) => bS_2 et aS_2 (propriété 1)

et de plus a et b ont un sommet commun x dans X_2

abC => x appartient à X_2 dans G privé de b puis de a

non(baC) => x appartient à X_1 dans G privé de a puis de b

D'où la contradiction.

Plus généralement nous parlerons de file compatible dans l'ensemble des arcs de G.

$a_1,\ldots a_p$ est une file n-compatible si et seulement si :

- $a_1 S$
- quel que soit $i = 2,\ldots,p$ a_i est n-suppressible dans G privé de $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$.

Remarquons que, d'après ce qui précède, si $a_1,\ldots,a_p$ est une file compatible alors quel que soit $i = 1,\ldots,p$ on a $\underline{a_i S}$.

La réciproque est évidemment fausse, mais si l'on fait l'hypothèse supplémentaire : quel que soit $i = 1,\ldots,p, a_i S_1$ alors $a_1,\ldots,a_p$ est une file compatible.

Propriété 3

La compatibilité d'une file est indépendante de l'ordre de ses éléments.

Démonstration :

soit f une file compatible. Permuttons 2 éléments consécutifs de f : a_i et a_{i+1}. On obtient la file f_1.
Considérons $G_{\overline{a_1,\ldots,a_{i-1}}}$

$$a_i a_{i+1} C \Rightarrow a_{i+1} a_i C \quad \text{dans} \quad G_{\overline{a_1,\ldots,a_{i-1}}}$$

$a_1 a_2,\ldots a_{i-1} a_i a_{i+1}$ et $a_1 a_2,\ldots a_{i-1} a_{i+1} a_i$ y sont des files compatibles.

Les graphes obtenus après suppression de $a_1,\ldots,a_i,a_{i+1}$ sont isomorphes quel que soit l'ordre des suppressions.

Donc (f compatible) implique (f_1 compatible). f restant compatible quel que soit la permutation de 2 éléments consécutifs, le reste pour toute permutation.

II-1-3 - FILES COMPATIBLES MAXIMALES ET GRAPHES MINIMAUX

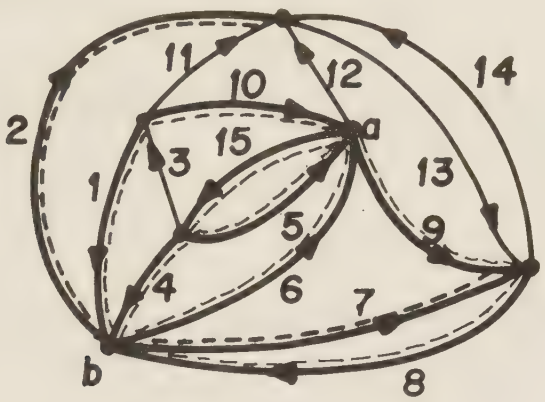
Soit K l'ensemble des arcs n-suppressibles de G. Par définition une file compatible est maximale si elle est maximale par inclusion dans K pour la compatibilité.

La méthode de recherche de files compatibles maximales consiste a écrire que pour chaque sommet de X_2 dans G on doit garder n arcs entrants et n arcs sortants.

Le produit booléen des expressions obtenues fournit les graphes minimaux correspondant à la suppression des files compatibles maximales.

Exemple : 1

Fixons $n=3$



$G = (X, U)$

Ensemble des arcs non 3-suppressibles de G :

$$\bar{K} = \{1,2,4,8,6,7,5,10,15,9\}$$

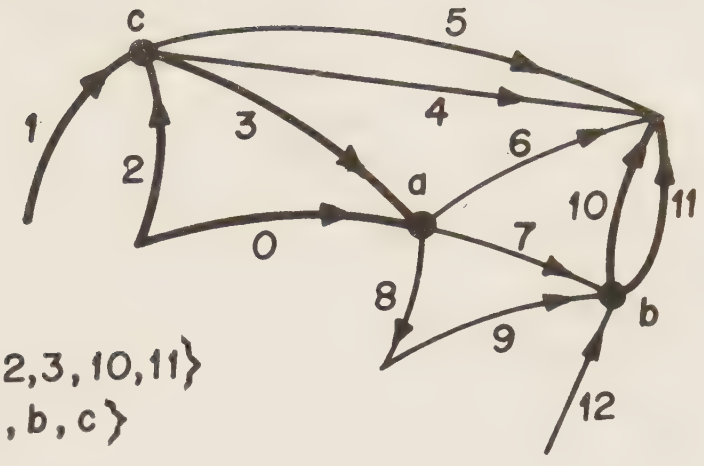
Tous les autres arcs sont 3-suppressibles inférieurement.
On a donc un seul graphe minimal obtenu en gardant l'ensemble des arcs de $\bar{K}$.
On peut le vérifier en remarquant que :

$$X_2 = \{a,b\}$$

$$d^+(a) = d^-(a) = d^+(b) = d^-(b) = 3$$

Exemple 2

Fixons $\boxed{n=2}$



$\bar{k}=\{0,1,2,3,10,11\}$

$X_2=\{a,b,c\}$

Outre les arcs de $\bar{K}$, on doit garder :

pour le sommet c : 4+5

" " a : 6.7+6.8+7.8

" " b : 7.9+9.12+7.12

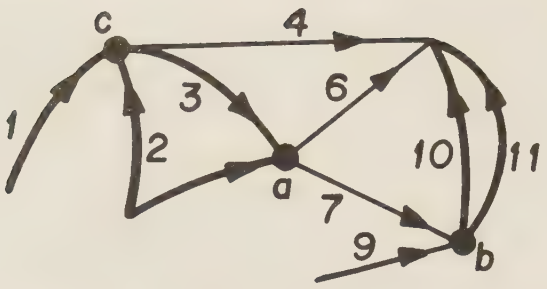
L'expression

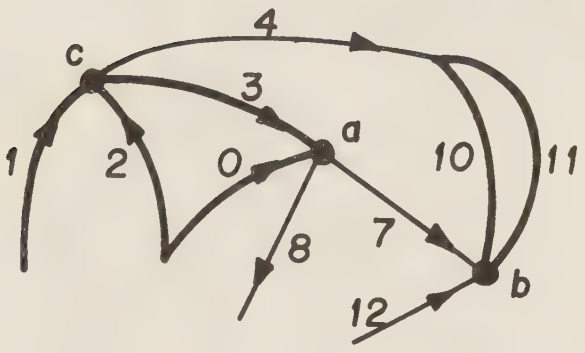
$$E = (4+5)(6.7+6.8+7.8)(7.9+9.12+7.12)$$

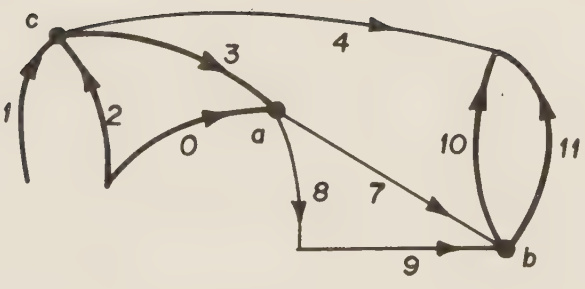
fournit 8 solutions (qui outre $\bar{K}$) consiste à garder :

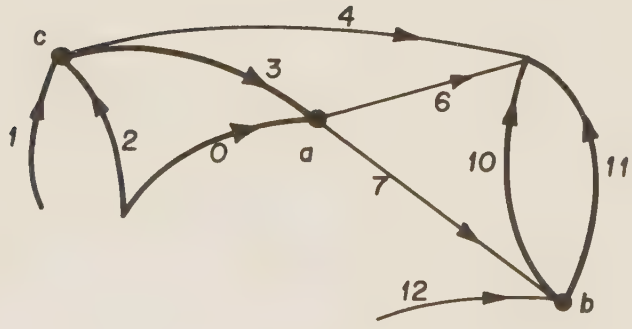
4.6.7.9	5.6.7.9.
4.6.7.12	5.6.7.12
4.7.8.9	5.7.8.9
4.7.8.12	5.7.8.12

Ces graphes minimaux sont deux à deux isomorphes (4 et 5 jouant le même rôle).


c
4
1
3
6
2
10
11
a
7
9
b


4
c
3
a
1
2
0
10
11
8
7
b
12


c
4
3
1
2
0
a
10
11
8
7
9
b


4
c
3
6
1
2
0
a
10
11
7
12
b

II.1.4. - PROBLEME a)

Ne pas faire décroître les 1/2 degrés d'un ensemble de sommets X' fixé à l'avance au dessous de n.

Fixons une valeur n et un ensemble de sommets X' de G et cherchons les suites de suppressions maximales pour le problème a) et les graphes minimaux correspondants.

Il s'agit d'effectuer les suites de suppressions maximales de G sans modifier la restriction à X' de la partition P_n de X.

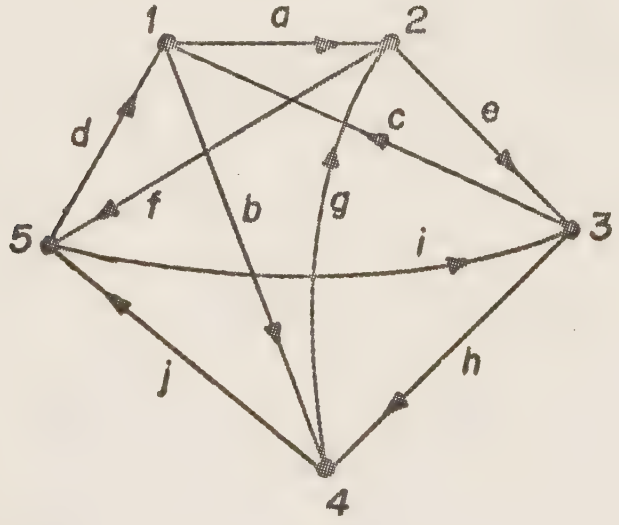
Algorithme

Soit X'_2 la restriction à X' de l'ensemble X_2 défini antérieurement. On applique la méthode exposée précédemment à X'_2.

Si X' = X on est ramené à la recherche des files compatibles de G. Mais si X' ≠ X on ne se ramène pas à la recherche des files compatibles d'un sous graphe de G.

Exemple :

Fixons n = 1 et X' = {1,3,5}



Pour le sommet 1 on doit garder (a+b)(c+d)

" 3 " (c+h)(e+i)

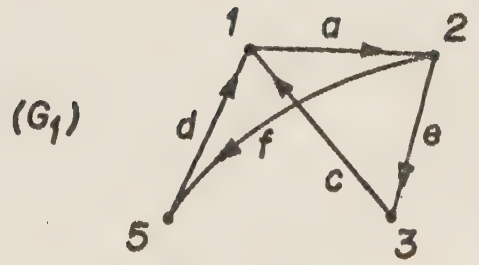
" 5 " (i+d)(f+j)

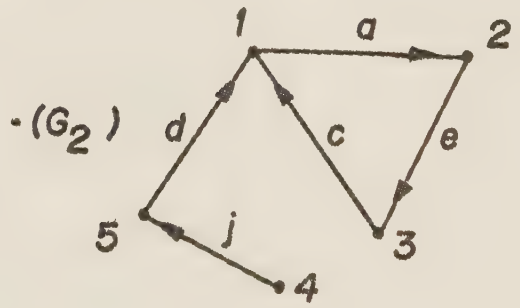
L'expression :

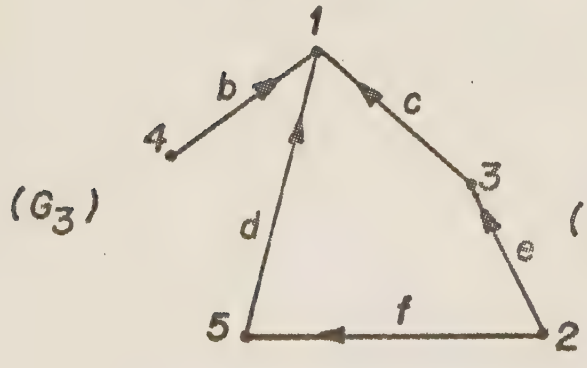
$$E = (a+b)(c+d)(c+h)(e+i)(i+d)(f+j)$$

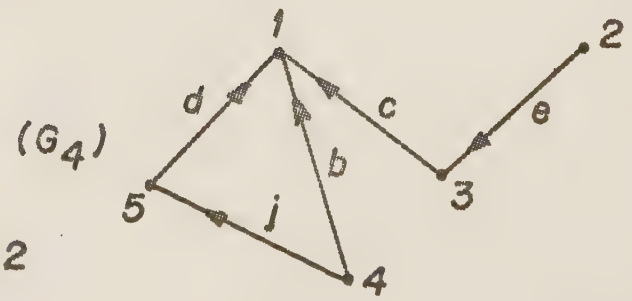
fournit 16 graphes minimaux qui consistent à garder :

pour	G_1 :	a.c.e.d.f	pour	G_5 :	a.c.i.f.
"	G_2 :	a.c.e.d.j	"	G_6 :	a.c.i.j
"	G_3 :	b.c.e.d.f	"	G_7 :	b.c.i.f
"	G_4 :	b.c.e.d.j	"	G_8 :	b.c.i.j
"	G_9 :	a.d.h.e.f	"	G_{13} :	b.d.h.e.f
"	G_{10} :	a.d.h.e.j	"	G_{14} :	b.d.h.e.j
"	G_{11} :	a.d.h.i.f	"	G_{15} :	b.d.h.i.f
"	G_{12} :	a.d.h.i.j	"	G_{16} :	b.d.h.i.j

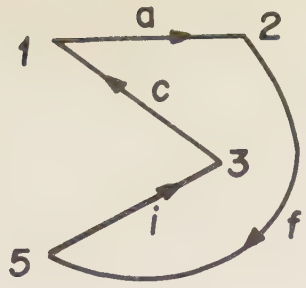




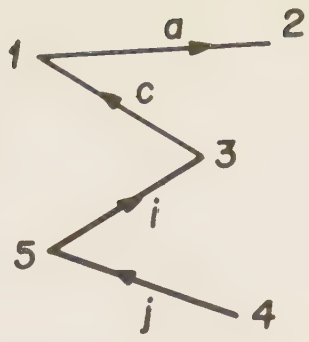




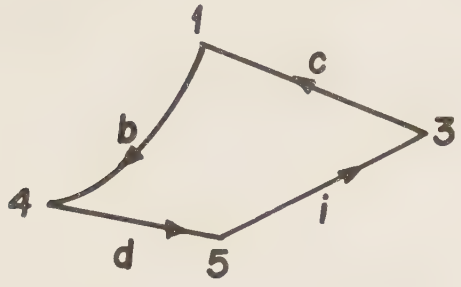
(G_5)



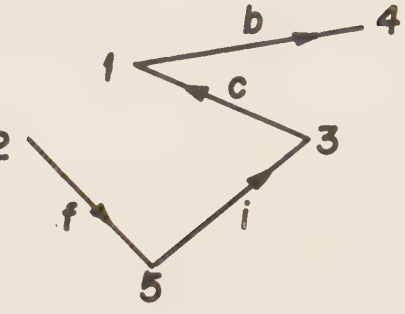
(G_6)



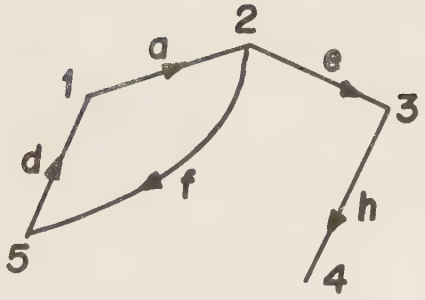
(G_8)



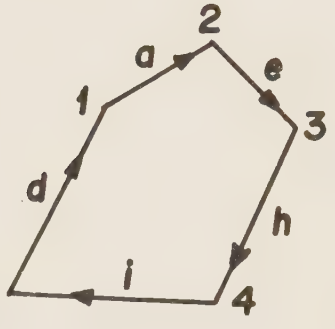
(G_7)



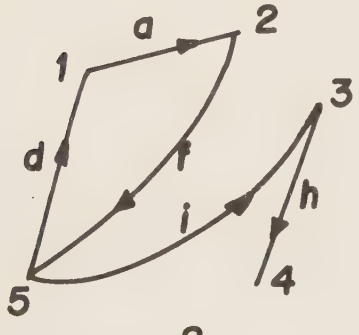
(G_9)



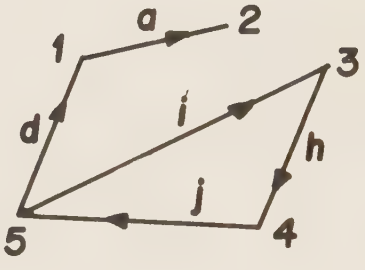
(G_{10})



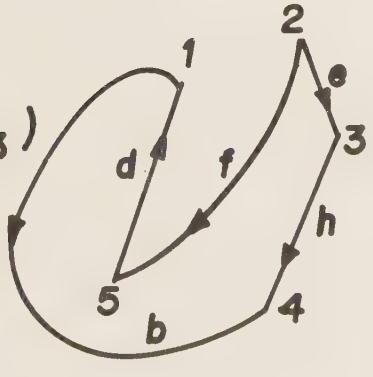
(G_{11})



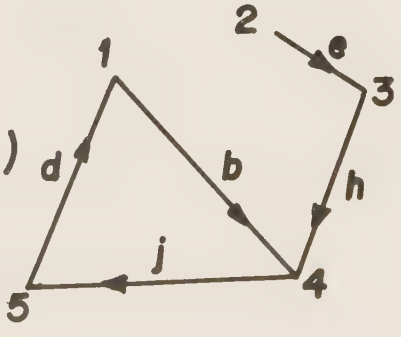
(G_{12})



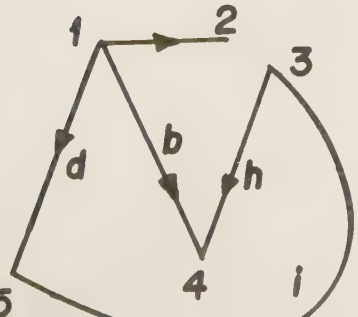
(G_{13})



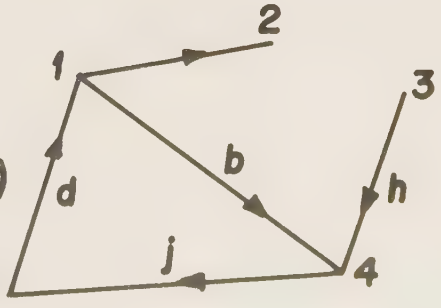
(G_{14})



(G_{15})



(G_{16})



II-2 - Contraction d'arcs

II-2-1 - CONTRACTION DE SOUS-GRAPHES CONNEXES DISJOINTS

Définition 1

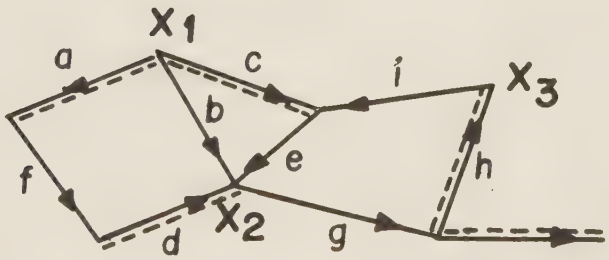
Deux sous graphes connexes de G sont disjoints s'ils n'ont pas de sommet commun.

Fixons un ensemble de sommet $X' = \{x_1,\ldots,x_p\}$ de G, et imposons nous de ne pas détruire par contraction d'arcs les éléments de X'. On est donc amené à contracter des sous graphes connexes disjoints de G : $G_{x_1},\ldots,G_{x_p}$ tels que :

$$\forall i = 1,\ldots,p \qquad x_i \in G_{x_i}$$

Un tel sous graphe G_{x_i} est dit relatif à x_i .

Exemple :



(G)

Désignons un sous graphe par l'ensemble des arcs qui l'engendrent

$$G_{x_1} = \{a,c\} \quad , \quad G_{x_2} = \{d\}, \quad G_{x_3} = \{h,j\}$$

sont des sous graphes connexes relatifs respectivement à x_1,x_2,x_3.

Définition 2

On appelle demi-degré d'un sous graphe partiel K de G les quantités :

$d^+(K)$ [resp. $d^-(K)$] telles que

$d^+(K)$ [resp. $d^-(K)$] est le nombre d'arcs de G n'appartenant pas à K mais ayant leur origine [resp. leur extrémité] dans K.

Exemple :

arc de K

(G)

$d^+(K) = 5$

$d^-(K) = 6.$

Propriété 1

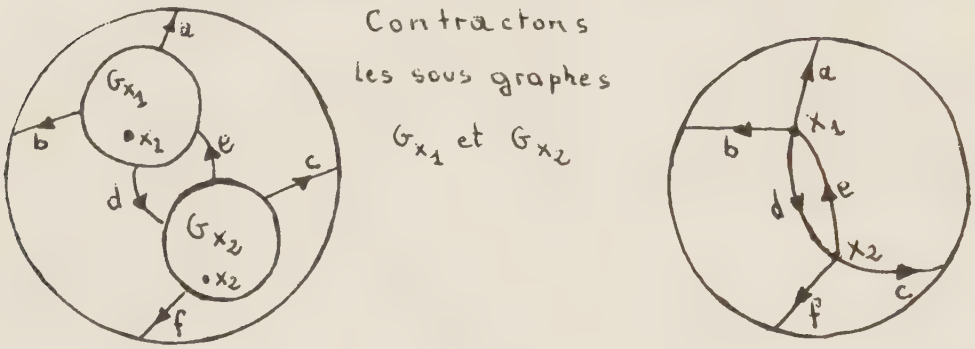
Soit $X' = \{x_1,\ldots,x_p\}$ un ensemble de sommets de G. Soient $G_{x_1},\ldots,G_{x_p}$ des sous graphes partiels de G respectivement relatifs à $x_1,\ldots,x_p$.

Après contraction des sous-graphes partiels $G_{x_1},\ldots,G_{x_p}$ on a :

$$d^{\pm}(x_i) = d^{\pm}(G_{x_i})$$

Démonstration

La contraction de G_{x_i} revient à identifier tous les arcs et sommets de G_{x_i} en un seul sommet x_i. Les sous graphes étant disjoints on a la propriété énoncée pour les demi-degrés de x et ceci quel que soit $i \in \{1,\ldots,p\}$.



II-2-2 - CAS PARTICULIER : CONTRACTION D'UN ARC

Effet sur les demi-degrés de la contraction d'un arc

A cet effet on distingue trois sortes d'arcs : les boucles
les arcs-sources (ou puits)
les autres arcs.

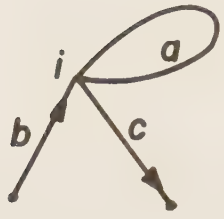
a) Cas d'abaissement des demi-degrés

Propriété 2

La contraction d'un arc ne peut modifier que les demi degrés de ses extrêmités.
En particulier la contraction . d'une boucle abaisse les demi-degrés de son sommet d'une unité.
. d'un arc-source (ou puit) abaisse le demi-degré entrant (sortant) de son extrêmité (origine) d'une unité.
. d'un arc-source-puits abaisse chacun de ces demi-degrés d'une unité.

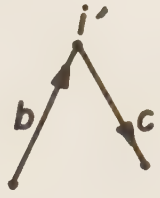
Démonstration

. a est une boucle

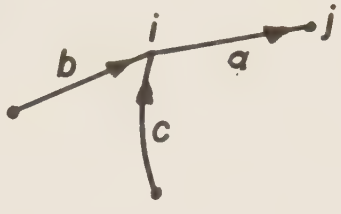


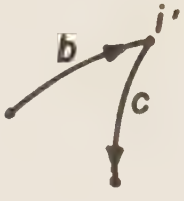
par contraction de a : $i \rightarrow i'$ et

$d^+(i') = d^-(i)-1$



. a est un arc puits (non arc-source)





Par contraction de a : $i \rightarrow i'$

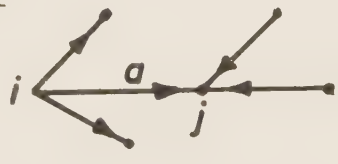
$j \rightarrow i'$

et $d^+(i') = d^+(i)-1$

$d^-(i') = d^-(j)+d^-(i)-1 \geq \text{Max}(d^-(j);d^-(i))$ car $d^-(j) \geq 1$

$d^-(i) \geq 1$

. a est un arc source-puits



Par contraction de a : $i \rightarrow i'$

$j \rightarrow i'$

et $d^+(i') = d^+(i)-1$

$d^-(i') = d^-(j)-1$

b) Cas où les demi-degrés ne diminuent pas : arc n-contractable

Propriété 3

La contraction d'un autre arc (ni arc-source, ni arc-puits, ni boucle) ne peut diminuer les demi-degrés.

En effet soit a = (i,j) cet arc.

Par contraction de a : $i \to i'$

$j \to i'$

et $d^{\pm}(i') = d^{\pm}(i)+d^{\pm}(j)-1 \geq \text{Max}(d^{\pm}(i),d^{\pm}(j))$

car $d^{\pm}(i) \geq 1$ et $d^{\pm}(j) \geq 1$.

Définition :

Un arc est n-contractable si et seulement si sa contraction ne crée pas de sommet de demi-degrés supérieur à n.

Caractérisation d'un arc n-contractable

Une boucle est n-contractable quel que soit n.

Un arc a= (i,j) où $i \neq j$ est n-contractable si et seulement si $d^{\pm}(i)+d^{\pm}(j) \leq n+1$.

Notation : $d^{\pm}(i)+d^{\pm}(j)$ est une abréviation de $d^{+}(i)+d^{+}(j)$ et $d^{-}(i)+d^{-}(j)$

Démonstration

Une boucle est n-contractable (cf. propriété 2).

Soit un arc a = (i,j) $i \neq j$.

Soit i' le sommet crée par contraction de a. On doit avoir $d^{\pm}(i') \leq n$.

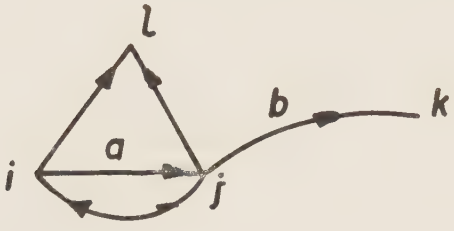
Contractons a : $i \to i'$

$j \to i'$

$\bar{d}^{+}(i') = \bar{d}^{+}(i)+\bar{d}^{+}(j)-1$

a est n-contractable <=> $\bar{d}^{+}(i') \leq n$ <=> $\bar{d}^{+}(i)+\bar{d}^{+}(j) \leq n+1$

Exemple



a est 4-contractable mais non 3-contractable.

$d^{+}(i)+d^{+}(j) = 2+3 = 5$

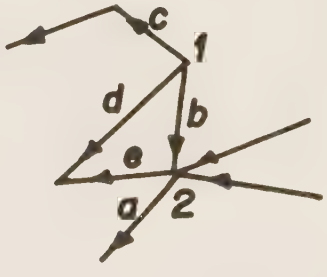
$d^{-}(i)+d^{-}(j) = 1+1 = 2.$

Corollaire

Un arc est n-contractable <=> Il est p-contractable $\forall p \geq n$.

II-2-3 - CAS OU L'ON PEUT REALISER UNE SUITE DE CONTRACTIONS SANS ABAISSEMENT INTERMEDIAIRE DES DEMI-DEGRES

Considérons le graphe G suivant



(G)

Effectuons la suite de contractions (a,b,c) :

En contractant l'arc puits a le demi-degré sortant de 2 décroît d'une unité.

Effectuons la suite de contraction (c,b,e,d) :

en contractant l'arc d (après contraction de c, b et e) les demi-degrés de 1 diminue d'une unité.

Théorème 1

La condition nécessaire et suffisante pour que la contraction d'une suite d'arcs n'abaisse pas les demi-degrés des sommets d'un graphe G est que les arcs de cette suite constituent une forêt sans arc-source ni puits de G.

Démonstration

- la contraction d'un arc-source ou puit abaisse un demi-degré
- la contraction d'un cycle se termine par la contraction d'une boucle donc abaisse des demi-degrés.

Les arcs de la suite constituent donc une forêt de G sans arc-source ni puits de G.
La réciproque est immédiate par la propriété 3.

II-2-4 - ON IMPOSE LA CONDITION SUPPLEMENTAIRE : LES DEMI DEGRES NE DEPASSENT PAS UNE VALEUR FIXEE N.

On désigne par I l'ensemble des deux conditions (celle du paragraphe II.2.3 et celle précédemment énoncée).
C'est-à-dire qu'une suite de contractions d'arcs vérifie la condition I si elle satisfait aux deux conditions :

1°) Aucun abaissement intermédiaire des demi-degrés
2°) Les demi-degrés ne dépassent pas une valeur n fixée (après les contractions).

Théorème 2

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de contractions d'arcs vérifie la condition I est que ses arcs engendrent des arbres disjoints de G : $T_1,\ldots,T_p$ sans arc-source ni -puits de G et tels que quel que soit $i = 1,\ldots,p \quad d^{\pm}(T_i) \leq n$.

C'est en effet un corollaire du théorème 1 et de la propriété 1. Ceci ne dépend pas de l'ordre des contractions.

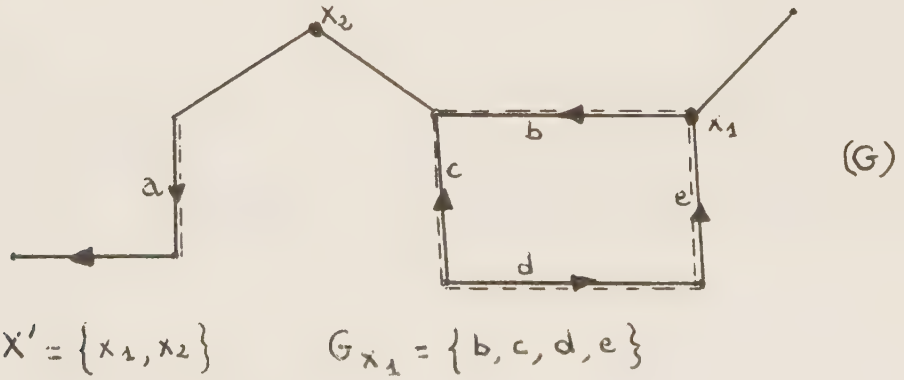
a) Recherche des suites de contractions relatives à $X' = \{x_1,\ldots,x_p\}$ maximales pour la condition I' et pour un ordre sur X'.

Définition : Une suite de contractions d'arcs est dite maximale relativement à X' pour l'ordre $1,\ldots,p$ si ses arcs engendrent des arbres disjoints de G sans arc-source, ni puits de G : $T_{x_1},\ldots,T_{x_p}$ tels que :

- quel que soit $i = 1,\ldots,p$ T_{x_i} est relatif à x_i
- T_{x_1} est maximal par inclusion dans G pour la condition $d^{\pm}(T_{x_1}) \leq n$.
- T_{x_i} est maximal par inclusion dans $G_{T_{x_1},\ldots,T_{x_{i-1}}}^{\sim}$ pour la condition $d^{\pm}(T_{x_i}) \leq n$.

On rappelle que $G_K^{\sim}$ désigne le graphe obtenu par contraction dans G du sous graphe partiel K.
On désigne par G_{x_i} la composante connexe (contenant x_i) du sous graphe de G engendré par x_i, les sommets ni source ni puits de G, mais aucun autre sommet de X' que x_i.

Exemple



Tout arbre maximal relatif à x_i est contenu dans G_{x_i}

Il ne peut en effet contenir d'autre arc que ceux de G_{x_i} car ce sont soit des arcs-sources ou puits de G,

soit des arcs d'origine ou d'extrêmité x_j, $x_j \neq x_i$
soit des arcs n'appartenant pas à un sous-graphe relatif à x_i, dont la contraction ne peut en aucun cas avoir d'effets sur les demi-degrés de x_i. On peut supposer dans un premier temps que ces arcs (ni-source, ni puits) ont été contractés.

Algorithme de recherche des suites maximales relatives à $X' = \{x_1,...x_p\}$ pour l'ordre (1,...,p).

Pour chaque i appartenant à {1,...,p} rechercher l'ensemble des arbres maximaux T_{x_i} relatifs à x_i.

. On considère G_{x_i}. Parmi les chaînes maximales de x_i dans G_{x_i} on conserve celles d'entre elles (ou des sous-chaînes) maximales pour la condition suivante :

(1) $d^{\pm}(x_1)+(d^{\pm}(y_1)-1)+...+(d^{\pm}(y_j)-1) \leq n$

Si la chaîne considérée est $x_1y_1,...y_j,...,y_p$, (en effet après contraction de la chaîne $x_1y_1,...,y_j$, $d^{\pm}(x_i)$ valent l'expression ci-dessus.)

. Par combinaison des chaînes (ou sous-chaînes) obtenues on en déduit facilement les arbres maximaux relatifs à x_i pour le problème énoncé. Il suffit en effet de rajouter à une chaîne obtenue les sommets d'autres chaînes obtenues jusqu'à saturation de la condition (1) sans déconnecter les chaînes et sans former de cycle.
Supposons par exemple qu'on ait obtenu deux chaînes maximales relatives à x_i, n étant égal à 5 :

$x_iy_1y_2y_3y_4$

$x_iy_1z_2z_3$

On fait suivre chacune d'elle des demi-degrés figurant dans l'expression (1).

Par exemple :

$x_1y_1y_2y_3y_4$: $d^+ : 2+1+0+1+1 = 5$

$d^- : 1+1+1+0+0 = 3$

$x_1y_1z_2z_3$: $d^+ : 2+1+0+2 = 5$

$d^- : 1+1+2+0 = 4$

La chaîne $x_iy_1y_2y_3y_4$ n'est pas maximale pour le problème car on peut lui rajouter l'arc y_1z_2 de la seconde chaîne.
Pour $T_1 = x_1y_1(y_2y_3y_4+z_2)$ on obtient :

$$d^+(x_i) = 5+d^+(z_2) = 5+0 = 5$$
$$d^-(x_i) = 3+d^-(z_2) = 3+2 = 5$$

De même à la chaîne $x_1y_1z_2z_3$ on peut rajouter l'arc y_1y_2 de l'autre chaîne :

Pour $T_2 = x_1y_1(y_2+z_2z_3)$ on obtient

$$d^+(x_i) = 5+d^+(y_2) = 5+0 = 5$$
$$d^-(x_i) = 4+d^-(y_2) = 4+1 = 5$$

T_1 et T_2 sont 2 arbres maximaux relatifs à x_i.

. Les arbres maximaux relatifs à $X' = \{x_1,\ldots,x_p\}$ dans cet ordre sont des sous-arbres des T_{x_i}, deux à deux disjoints (c'est-à-dire sans sommet commun) et maximaux pour la condition (1) successivement dans l'ordre $1,\ldots,p$.

Supposons par exemple que l'on ait : $X' = \{x_1,x_2\}$ et que l'on ait obtenu T_{x_1} et T'_{x_1} relatifs à x_1, maximaux, T_{x_2}, maximal relatif à x_2.

Les arbres maximaux relatifs à $X' = \{x_1,x_2\}$ dans l'ordre (1,2) sont :

$T_{x_1}, \hat{T}_{x_2}$

$T'_{x_1}, \tilde{T}_{x_2}$

où $\hat{T}_{x_2}$ est un sous-arbre connexe de T_{x_2} maximal par inclusion dans T_{x_2} pour la condition d'être disjoint de T_{x_1}. $\hat{T}_{x_2}$ n'est pas toujours unique.

Le raisonnement est analogue pour $\tilde{T}_{x_2}$ relativement à T'_{x_1}.

b) Application

Considérons le problème suivant au sujet de la contraction d'arcs (problème b) :

Ne pas faire croître les demi-degrés d'un ensemble de sommets de G fixés à l'avance au dessus de certaines valeurs.

Fixons un ensemble de sommets $X' = \{x_1,\ldots,x_p\}$ de G et une valeur n.

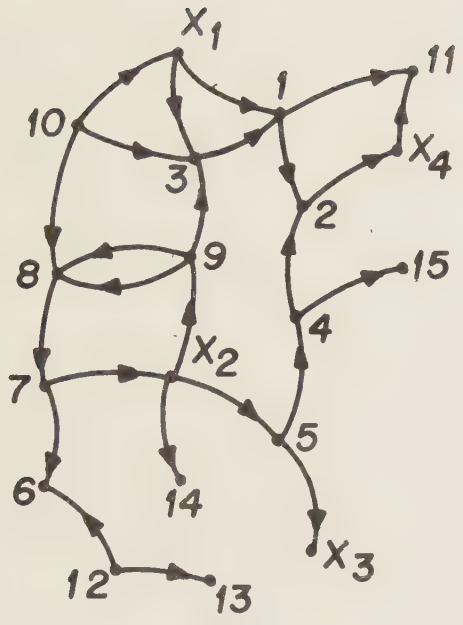
La résolution du problème b) consiste à extraire de G tous les sous graphes partiels connexes disjoints G_{x_i} relatifs à x_i, $i = 1,\ldots,p$ dont les demi-degrés sont $\leq n$.
Il n'existe pas de méthode autre qu'heuristique pour aboutir à l'ensemble des solutions.

En imposant la condition supplémentaire que les demi-degrés des éléments de X' ne décroissent à aucune étape de contraction, on trouve un ensemble de solutions maximales particulières qui consistent ayant fixé X' et un ordre γ sur X' à rechercher les suites de contractions relatives à X' maximales pour la condition I et l'ordre γ.

Exemple :

Fixons n = 5, $X' = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

(G)

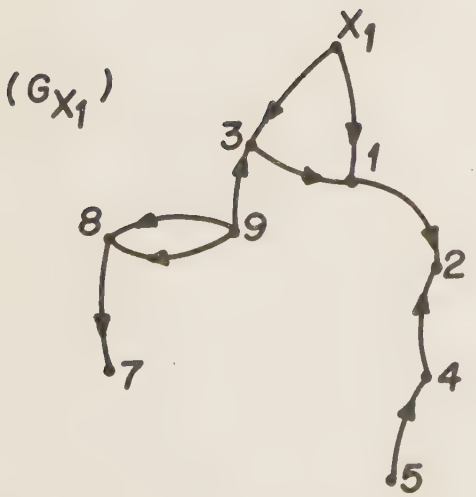


Les sources sont 10, 12.

Les puits sont 6, 11, 13, 14, 15, x_3

	d^+	d^-
x_1	2	1
x_2	3	1
x_3	0	1
x_4	1	1
	d^+-1	d^--1
1	1	1
2	0	1
3	0	2
4	1	0
5	1	0
7	1	0
8	0	2
9	2	0

(G_{X_1})



Les arcs multiples fournissant chacun les même
suites il suffit d'en considerer un seul

Chaînes issues de x_1 dans G_{x_1}

$x_1.1.2.4.5.$	d^+	2+1+0+1+1 = 5
	d^-	1+1+1+0+0 = 3
$x_1.1.3.9.8.7$	d^+	2+1+0+2+0 = 5
	d^-	1+1+2+0+0 = 4
$x_1.3.1.2.4.5$	d^+	2+0+1+0+1+1 = 5
	d^-	1+2+1+1+0+0 = 5
$x_1.3.9.8.7$	d^+	2+0+2+0+1 = 5
	d^-	1+2+0+2+0 = 5

Arbres maximaux dans G relatifs à x_1

$x_1.1(2.4.5+3) \rightarrow (5,5)$

$x_1.(1.2.4.5+3) \rightarrow (5,5)$

$x_1.1(2+3.9) \rightarrow (5,5)$

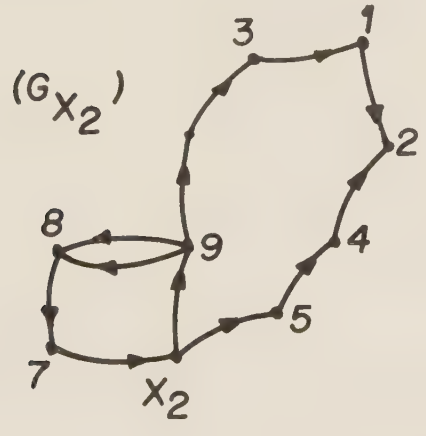
$x_1.1+x_1.3.9 \rightarrow (5,4)$

$x_1.3.(1.2+9) \rightarrow (5,5)$

$x_1.3.1.2.4.5 \rightarrow (5,5)$

$x_1.3.9.8.7 \rightarrow (5,5)$

Trois de ces arbres ne sont pas isomorphes : $x_1.3.1.2.4.5$; $x_1.3.9.8.7$ et $x_1.1.2.3.9$. Mais pour la suite nous devons garder leurs différentes factorisations



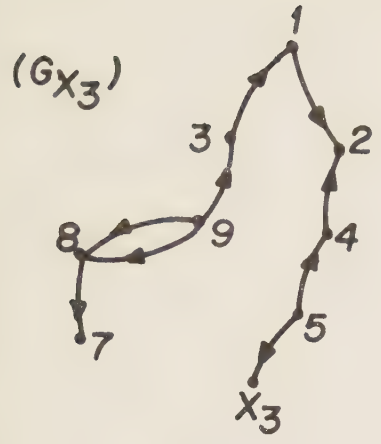
$x_2.9.3.1.2.4.5$	3+2+0+1 = 5 1+0+2+1 = 5
$x_2.9.8.1$	3+2+0+1 = 5 1+0+2+0 = 3
$x_2.7.8.9.3.1$	3+1+0+1 = 4 1+0+2+0 = 3
$x_2.5.4.2.1$	3+1+1+0+1 = 5 1+0+0+1+1 = 2

Arbres maximaux relatifs à x_2 :

$x_2.9(8+3) \rightarrow (5,5)$

$x_2.(7.8+5) \rightarrow (5,3)$

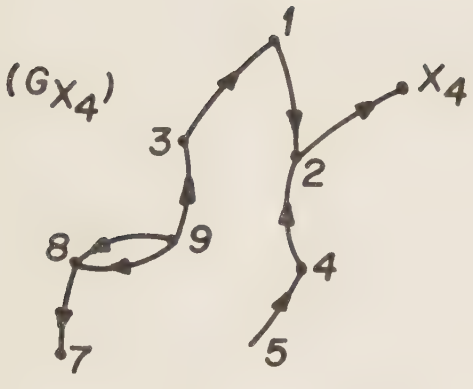
$x_2.5.4.2 \rightarrow (5,2)$



$x_3.5.4.2.1.3.\not{9}.\not{8}.7$	0+1+1+0+1+0+2+/ = 5 1+0+0+1+1+2+0+/ = 5

Arbres maximaux relatifs à x_3 :

$x_3.5.4.2.1.3 \rightarrow (5,5)$



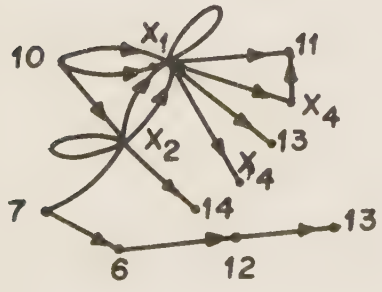
$x_4.2.1.3.9.8.7$	1+0+1+0+2+0 = 4 0+1+1+2+0+2 = 4
$x_4.2.1.5$	1+0+1+1 = 3 0+1+0+0 = 1

Arbres maximaux relatifs à x_4 :

$x_4.2(1.3.9+4) \rightarrow (5,4)$

$x_4.2(1.3+4.5) \rightarrow (4,5)$

fournit le graphe minimal $G_{\widetilde{S}_1}$



Arbres maximaux relatifs à X' dans l'ordre 1,2,3,4

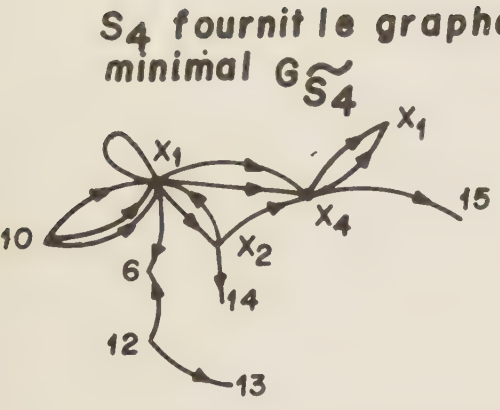
$S_1 = x_1.3.1.2.4.5,\ x_2.9.8,\Phi,\Phi$

$S_2 = x_1.3.1.2.4.5,\ x_2.7.8,\Phi,\Phi$

$S_3 = x_1.1.2.3.9,\ x_2.7.8.5,\Phi,\Phi$

$S_4 = x_1.1.2.3.9,\ x_2.5.4,\Phi,\Phi$

$S_5 = x_1.3.9.8.7,\ x_2.5.4.2,\Phi,\Phi$



Arbres maximaux relatifs à X' dans l'ordre 1,4,3,2

$S_1 = x_1.3.1.2.4.5,\Phi,\Phi,x_2.9.8$

$S_2 = x_1.3.1.2.4.5,\Phi,\Phi,x_2.7.8$

$S_3 = x_1.1.2.3.9,\Phi,x_3.5.4,x_2.7.8$

$S_4 = x_1.3.9.8.7,x_4.2.1.4.5,\Phi,\Phi$

Arbres maximaux relatifs à X' dans l'ordre 3,4,2,1

$S_1 = x_3.5.4.2.1.3,\Phi,x_2.9.8,\Phi$

$S_2 = x_3.5.4.2.1.3,\Phi,x_2.7.8,\Phi$

Arbres maximaux relatifs à X' dans l'ordre 2,1,3,4

$S_1 = x_2.9.8.3,x_1.1.2.4.5,\Phi,\Phi$

$S_2 = x_2.7.8.5,x_1.1.2,\Phi,\Phi$

$S_3 = x_2.7.8.5,x_1.1.2.3.9,\Phi,\Phi$

$S_4 = x_2.5.4.2,x_1.1.3.9,\Phi,\Phi$

$S_5 = x_2.5.4.2,x_1.3.9.8.7,\Phi,\Phi$

Les suites maximales n'ont pas toutes la même longueur et ne conduisent pas toutes au même réseau.

On ne peut dans ce cas espérer décrire ce qu'on obtient qui dépend de n.

Nous allons considérer le cas où n est très grand (cette notion sera précisée). Dans ce cas, les graphes minimaux sont caractérisables.

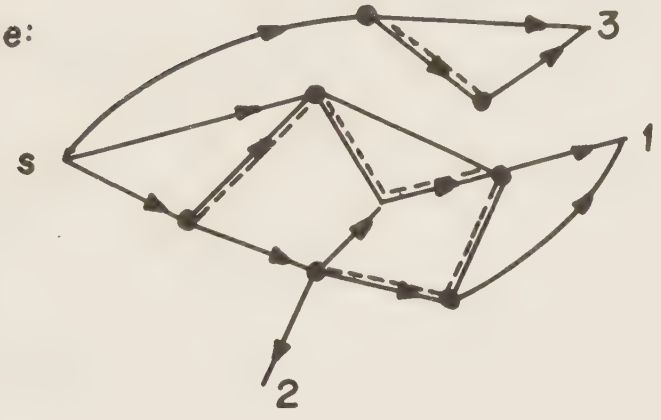
II-2-5 - SOUS-GRAPHE RELATIF A L'ENLEVEMENT DES SOURCES ET DES PUITS D'UN GRAPHE

On se pose le problème suivant au sujet de la contraction d'arcs :

Ne pas faire croître les demi-degrés des sommets de G au dessus de n sans abaissement intermédiaire des demi-degrés, n étant très grand.

Soit Q le sous-graphe de G engendré par les sommets ni source, ni puits de G.
Soit $\overset{\circ}{F}$ une forêt complète de Q. $\overset{\circ}{F}$ a p constituants connexes.

Exemple:



(G)

==== arc de $\overset{\circ}{F}$

$\boxed{p=2}$

$d^+(\overset{\circ}{F})=8$

$d^-(\overset{\circ}{F})=6$

Remarque : Les demi-degrés de $\overset{\circ}{F}$ ne dépendent pas du choix de la forêt

Soient m le nombre d'arcs ni-source, ni puits de G et n le nombre de sommets ni source, ni puits de G.
Soit k le nombre de cordes de $\overset{\circ}{F}$

$$\boxed{k = m-n+p}$$

$d^-(\overset{\circ}{F})$ est égal au nombre d'arcs-source de G + k

$d^+(\overset{\circ}{F})$ est égal au nombre d'arcs puits de G + k

Propriété

On ne peut sans abaissement intermédiaire de demi degrés faire croître des demi-degrés des sommets de G au dessus de $d^{\pm}(\overset{\circ}{F})$ par contraction d'arcs.

Démonstration :

On sait que l'on doit contracter une forêt de G, sans arc-source ni puits de G.

Soit F une telle forêt. Il existe une forêt $\overset{\circ}{F}$ (ci-dessus définie) telle que $F \subset \overset{\circ}{F}$.

$\overset{\circ}{F}$ s'obtient en ajoutant à F des arcs ni-source, ni puits de G. Les demi-degrés de $\overset{\circ}{F}$ ne peuvent donc être inférieurs à ceux de F :

$d^{\pm}(F) \leq d^{\pm}(\overset{\circ}{F})$.

On ne peut d'autre part contracter d'autres arcs en plus de ceux de $\overset{\circ}{F}$ car ce sont des arcs-source ni-puits de G dont la contraction fait décroître des demi-degrés.

c.q.f.d.

Fixons $n \geq \text{Max}(d^{+}(\overset{\circ}{F}), d^{-}(\overset{\circ}{F}))$.

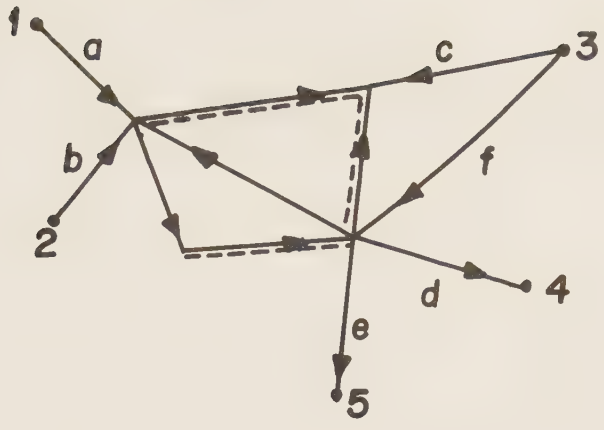
Les graphes minimaux pour le problème énoncé sont obtenus en contractant $\overset{\circ}{F}$. Ils sont isomorphes entre eux. Soit G_m un tel graphe.

G_m est constitué de p sommets (éventuellement bouclés) $x_1,\ldots,x_p$ auxquels sont adjacents les arcs-sources et puits de G.

Le nombre de boucles de G_m est égal au nombre de cordes de $\overset{\circ}{F}$, c'est-à-dire k.

Exemple:1

(G)

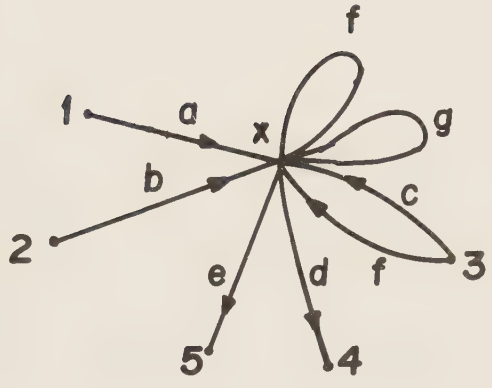


==== F°

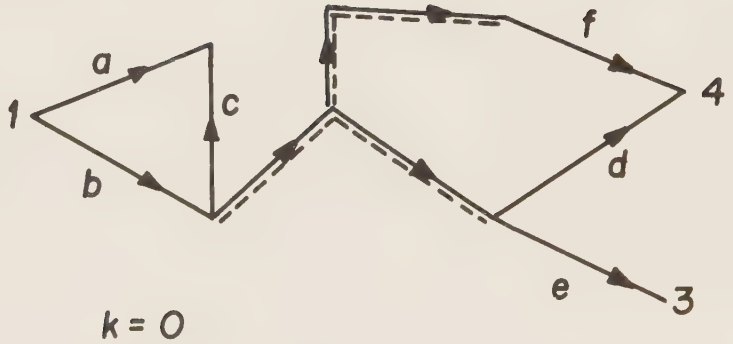
k = 2

p = 1

(G_m)



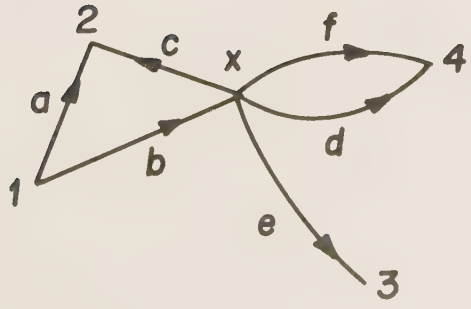
Exemple 2



(G)

k = O

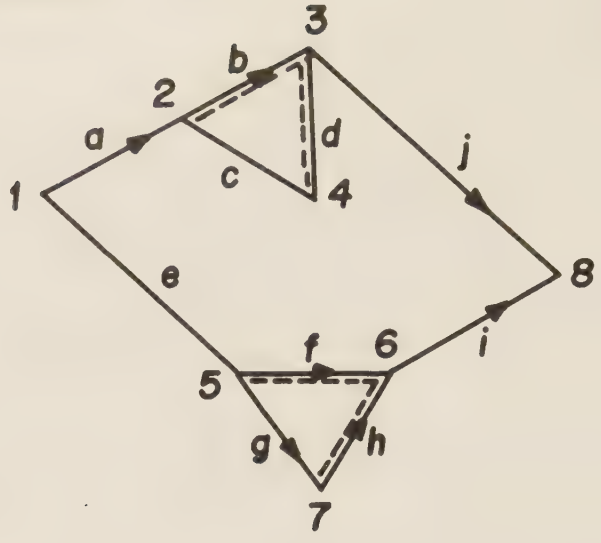
p = 1



(G_m)

G_m est sans boucle

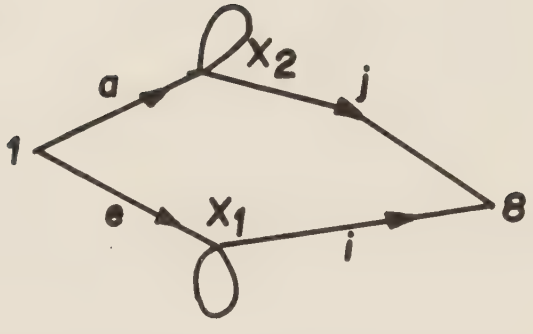
Exemple 3



$k = 2$

$p = 2$

(G)



(G_m)

III - SIMPLIFICATION D'UN GRAPHE AVEC CONTRAINTE SUR LES CIRCUITS

III-1 - Suppression d'arcs

On ne peut par suppression d'arcs créer de circuits.

Les deux problèmes suivants sont donc équivalents.

Ne pas détruire de circuits de G par suppression d'arcs (C).

A aucune étape des suppressions ne détruire de circuits (C').

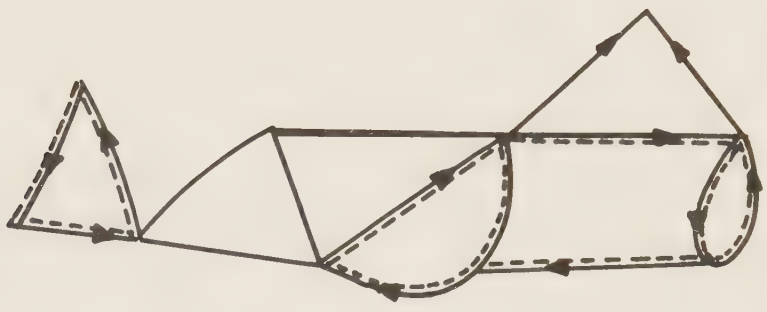
- La suppression d'un arc détruit un circuit si et seulement si les extrêmités de l'arc sont dans une même classe d'isovalence.

- Pour tout graphe G il existe un graphe minimal et un seul G_m solution du problème C).
  G_m est obtenu en supprimant de G les arcs dont les extrêmités ne sont pas dans une même classe d'isovalence.
  En d'autres termes, G_m est constitué des sous graphes de G engendrés par les classes d'isovalence.

Exemple

(G)

==== arc de G_m



III-2 - Contraction d'arcs

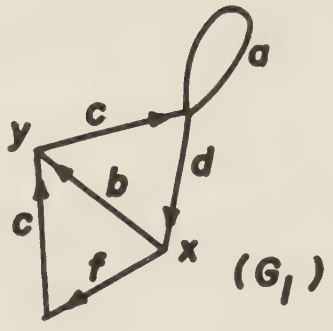
III-2-1 - CAS OU LES CONTRACTIONS NE DETRUISENT PAS DE CIRCUIT

III-2-1.1. - Arc d-contractable

Définition 1 - La contraction d'un arc a = (x,y) détruit un circuit si et seulement si :
a est une boucle, ou bien
a est la traverse d'un circuit, (c'est-à-dire il existe un circuit C ne contenant pas a mais tel que x et y appartiennent à C; en contractant a on crée un "court-circuit").

Un arc dont la contraction ne détruit pas de circuit est dit d-contractable.

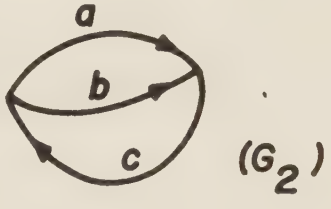
Exemple 1



a n'est pas d-contractable

b n'est pas d-contractable : la contraction de b détruit le circuit cdfe dont il est la traverse.

Exemple 2



a est non d-contractable car c'est la traverse du circuit bc.
De même b est non d-contractable.
Par contre c est d-contractable.

III-2-1-1 - Effets de la contraction d'arcs d-contractables sur les autres arcs.

On définit 2 relations internes à l'univers U des arcs de G :

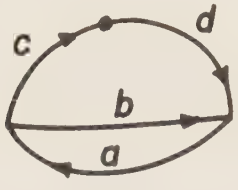
- aD : a est d-contractable dans G (on note : non (aD) sa négation.
- baN : a est d-contractable dans G, puis b est non d-contractable après contraction de a.

Propriété 1

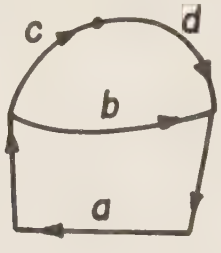
aD et non (bD) => baN

c'est-à-dire: la contraction d'un arc (d-contractable) conserve les arcs non d-contractables.

Démonstration : c'est immédiat si b est une boucle.
Sinon b est la traverse d'un circuit et après contraction de a, b est soit une boucle, soit la traverse du même circuit. En effet on a seulement 2 configurations possibles :



Dans ce cas b devient une boucle



Dans ce cas b reste la traverse du même circuit.

Propriété 2

(aD et bD => baN)

si et seulement si (a et b forment un cycle) ou bien (a et b ont un sommet commun et la chaîne ab forme la traverse d'un circuit.)

Corollaire : Sous certaines hypothèses la relation baN est symétrique : bD et baN <=> aD et abN

Démonstration : En effet a et b joue des rôles symétriques d'après la propriété 2.
Donc si b cesse d'être d-contractable après contraction de l'arc d-contractable a, a cesse d'être d-contractable après

III-2-1-3 - Suites de contractions d'arcs d-contractables

- un arc non d-contractable le reste, quelles que soient les contractions effectuées.
- un arc d-contractable peut cesser de l'être.

On considère les suites de contractions permises.

Propriété 3

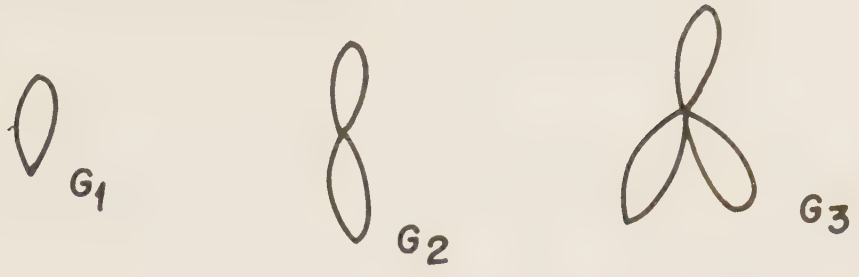
Les suites de contractions d'arcs d -contables sont commutatives.

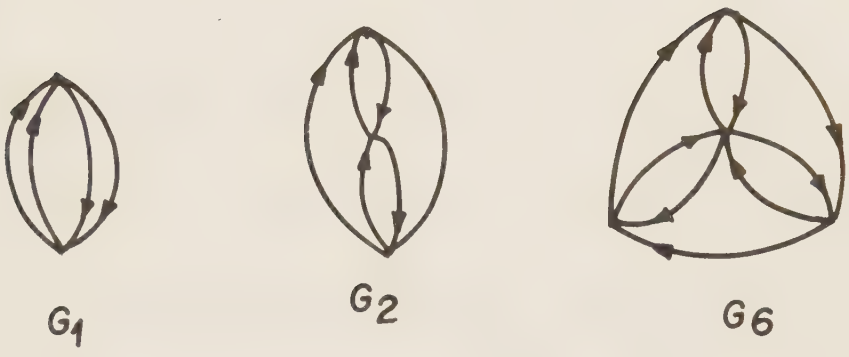
C'est en effet une conséquence du corollaire de la propriété 2 : on peut permuter 2 éléments consécutifs quelconques d'une telle suite $a_1,\ldots,a_p$.
Permutons a_i et a_{i+1}.
Après contraction de $a_1,\ldots a_{i-1},a_{i+1}$ est d-contractable sinon il ne le serait pas après contraction de a_i.
La suite $a_1\ldots a_{i-1}a_{i+1}$ est donc permise . Considérons a_i.
Si a_i n'était pas d-contractable après contraction de a_{i+1}, par la propriété 2 a_{i+1} ne serait pas d-contractable après contraction de a_i. C'est en contradiction avec l'hypothèse sur la suite $a_1,\ldots a_p$.
A une suite maximale de contractions d'arcs d-contractables correspond un graphe minimal obtenu par contraction des arcs de cette suite.

Propriété 4

Les graphes minimaux sont isovalents et caractérisés par le fait que tout arc est soit une boucle, soit la traverse d'un circuit.

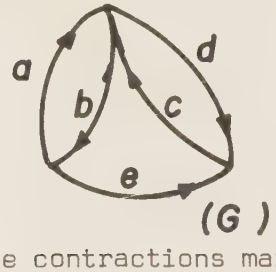
Exemple de graphes minimaux :



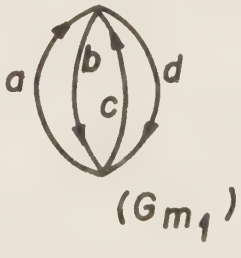


Tout arc de G_1, G_2 et G_3 est une boucle.
Tout arc de G_4, G_5 et G_6 est la traverse d'un circuit.

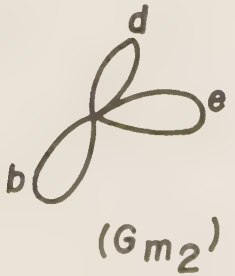
Exemple de suites de contractions maximales



(e) est une suite de contractions maximales qui conduit au graphe minimal G_{m_1} :



(a,c) est une suite maximale conduisant au graphe minimal G_{m_2}.



Aux marques près, tous les graphes minimaux sont isomorphes à G_{m_1} ou G_{m_2}.

Les suites de contractions maximales pour le problème d) n'ont généralement pas toutes la même longueur et ne conduisent pas au même graphe.

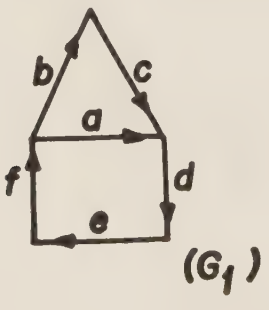
III-2-2 - CAS OU LES CONTRACTIONS NE CREENT PAS DE CIRCUIT

III-2-2-1 - Arc c-contractable

Définition 1 - La contraction d'un arc a ne crée pas de circuit si et seulement si :
- a est une boucle ou bien
- il n'existe pas d'autre chemin que a joignant x à y.

Un tel arc est dit c-contractable.

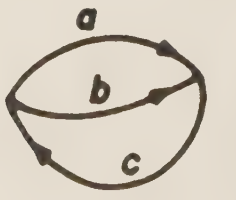
Exemple : 1)



(G_1)

a est non c-contractable dans G_1 (sa contraction crée le circuit bc).
Chacun des autres arcs de G_1 est c-contractable.

2)



(G_2)

Seul l'arc c est c-contractable dans G_2.

Remarque : Une définition intuitive serait de dire que la contraction d'un

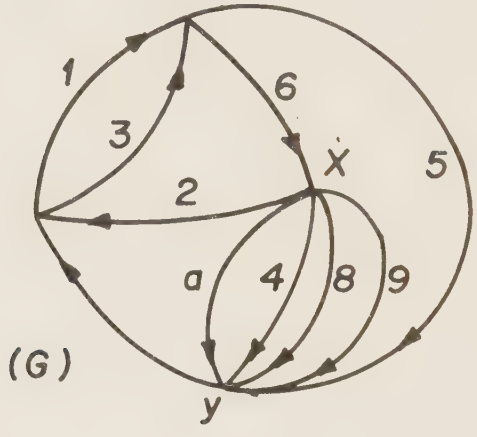
arc a de G ne crée pas de circuit si le nombre de circuits n'augmente pas par contraction de a.

Or le compte des circuits avant et après contraction peut être très compliqué.
En effet, considérons un arc a = (x,y).

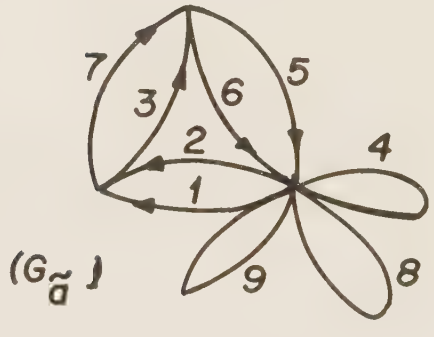
- Si l'ensemble des chemins joignant x à y est disjoint (pour les arcs) de l'ensemble des chemins joignant y à x le compte des circuits avant et après contraction de a est facile.

- ce n'est pas le cas si ces ensembles ne sont pas disjoints.

Exemple :



Contractons a :



Il y a 12 circuits dans G. $(G_{\tilde{a}})$
Il y a 11 circuits dans $G_{\tilde{a}}$.
Dans le cadre de la définition donnée la contraction de a crée les circuits 275 et 235. a n'est donc pas c-contractable.

Propriété 1

Si G est sans circuit ou bien isovalent la contraction d'un arc c-contractable conserve à G cette qualité.

Démonstration :

i) G est sans circuit.

Soit a un arc c-contractable de G.

a n'est pas une boucle.

Contractons a = (x,y) $x \to z$

$y \to z$

Supposons que $G_a^{\sim}$ ait un circuit. Alors ce circuit passe par z et provient d'un chemin de G joignant x à y. C'est en contradiction avec la définition d'un arc c-contractable.

ii) G est isovalent.

La contraction d'un arc quelconque ne peut modifier la propriété : il existe un chemin de x à y.

III-2-2-2 - Effets de la contraction d'arc c-contractables sur les autres arcs

Propriété 2

Par contraction de l'arc c-contractable a, l'arc non c-contractable b ne peut le devenir qu'en devenant une boucle.

En effet, si b = (x,y) avant contraction de a il existe un chemin autre que b joignant x à y, il n'en existe plus après contraction de a. Donc b est devenu une boucle.

Remarquons que les hypothèses de cette propriété entraînent que a et b forment un circuit (avant contraction de a).

Corollaire :

Si par contraction d'arcs c-contractables un arc b non c-contractable devient c-contractable, il le reste quelques soient les contractions ultérieures.

En effet, la contraction de tout arc laisse à b sa structure de boucle.

Propriété 3

Pour que la contraction de l'arc c-contractable a rende b non c-contractable, alors qu'il l'était avant, il faut et il suffit que a et b forment un demi-cycle.

Démonstration : La condition est suffisante.

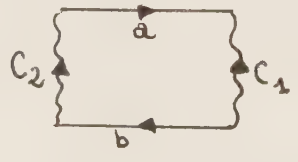
Si a et b forme le demi-cycle μ^+.

Soit μ^- l'autre demi-cycle.

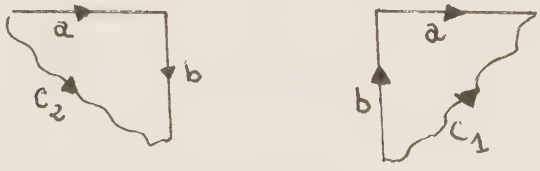
Par contraction successive de a et b, μ^- devient un circuit donc b n'est plus c-contractable après contraction de a.

La condition est nécessaire

La seule configuration possible est en effet :



l'un des C_1 ou C_2 pouvant ne pas exister.



III-2-2-3 - Suite de contraction d'arcs c-contractables au moment de leur contraction.

Considérons le problème suivant : ne pas créer de circuit dans un graphe G par contraction d'arcs (problème e)

Définition 2 : Une suite de contractions d'arcs de G satisfait au problème e) si et seulement si aucune d'elle ne crée de circuit dans le graphe au moment de sa contraction.

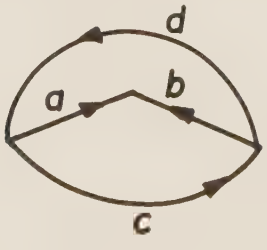
En d'autres termes, une suite satisfait au problème e) si et seulement si c'est une suite d'arcs c-contractables.

Soit S une telle suite, on peut d'après ce qui précède distinguer deux sortes d'arcs dans S : ceux qui sont c-contractables dans G, ceux qui le deviennent ultérieurement et qui le reste quelques soient les contractions ultérieures.

Dans la recherche des suites de contractions satisfaisant au problème e) on peut donc d'abord contracter les arcs de la première catégorie puis contracter les boucles obtenues qui constituent la 2ème catégorie.

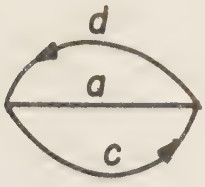
La contraction des arcs de la première catégorie ne peut se faire dans un ordre quelconque : en effet, un arc c-contractable peut cesser de l'être puis le redevenir :

Exemple :



(G)

a est c-contractable dans G.
Contractons l'arc c-contractable b, a n'est plus c-contractable.



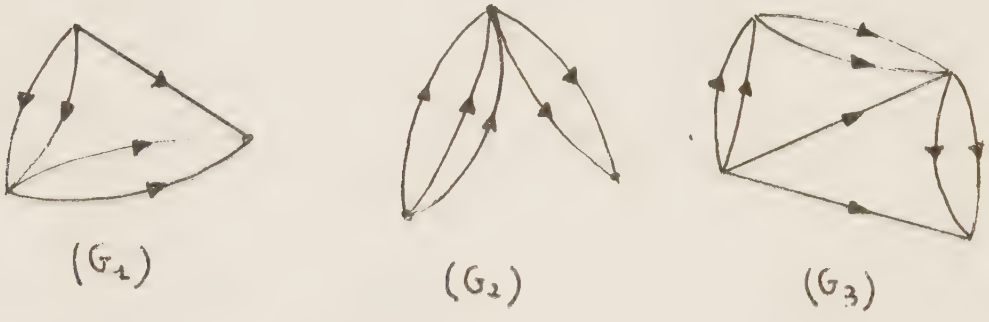
$G\tilde{b}$

Puis contractons l'arc c-contractable d (qui l'était déjà dans G), a devient une boucle donc c-contractable.

Suite de contractions maximales et graphes minimaux

Les graphes minimaux pour le problème e) sont soit vides, soit caractérisés par le fait que tout arc constitue un demi-cycle. (cf. propriété 3)

Exemple :



(G_1) (G_2) (G_3)

G_1, G_2, G_3 sont minimaux.

La recherche des graphes minimaux s'effectue :

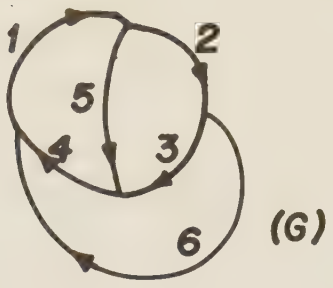
a) en écrivant que pour chaque demi-cycle on doit garder au moins un arc et pour simplifier l'expression E obtenue on applique les lois d'absorbsion.

b) On supprime ensuite les boucles obtenues.

Remarque:a) se réalise en couvrant les cycles qui ne sontpas des circuits par les demi-cycles les plus courts.

Application :

Exemple 1



G est isovalent.

On a 4 cycles qui ne sontpas des circuits :

1536, 235, 346, 2645

Ils sont formés des demi-cycles 156/3, 23/5, 34/6, 26/45

E = (1+5+6)3(2+3)5(3+4)6(2+6)(4+5)

Les 1/2 cycles 156 est absorbé par le 1/2 cycle : 5

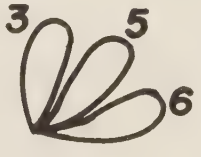
Les 1/2 cycles 23 et 34 sont absorbés par le 1/2 cycle : 3

Le 1/2 cycles 26 est absorbé par le 1/2 cycle 6.

D'où

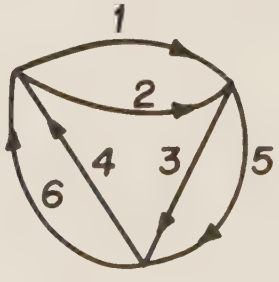
E = 3.5.6.

On obtient un graphe constitué de 3 boucles que l'on contracte.



Il y a un graphe minimal qui est vide.

Exemple 2

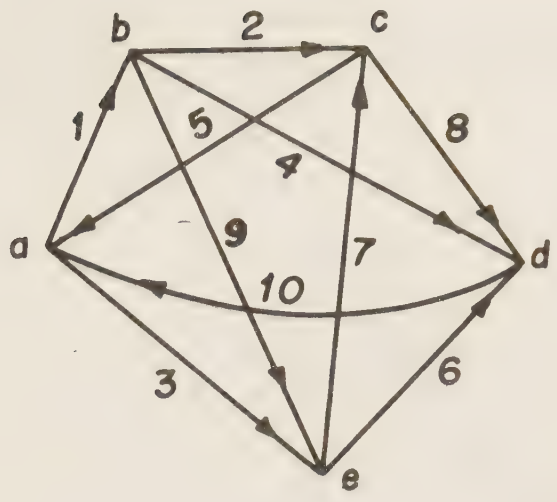


(G)

C'est un graphe isovalent qui ne devient pas vide.

Chaque arc de G forme un 1/2 cycle. G est minimal

Exemple 3



G est isovalent. On a en effet les circuits suivants qui contiennent tous les arcs :

(1),(2),(8),(10)

(3),(6), 10

(4), 10, 1

(5), 1, 2

(7), 8, 10, 3

(9), 7, 5, 1

Les 1/2 cycles minimaux (c'est-à-dire non absorbés) sont :

6	qui forme un cycle	avec le 1/2 cycle	7.8
2	"	"	9.7
5	"	"	8.10
3	"	"	1. 9
4	"	"	9.6
8	"	"	5.3.6
9	"	"	2.5.3
7	"	"	6.10.1.2

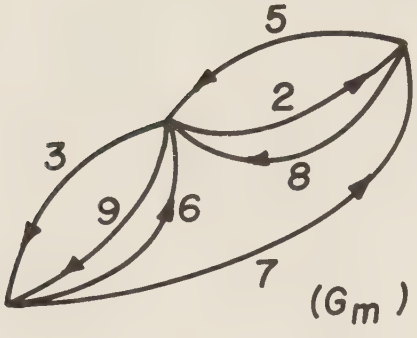
L'ensemble des 1/2 cycles de droite sont absorbés par l'ensemble des 1/2 cycles de gauche.

E = 2.3.4.5.6.7.8.9

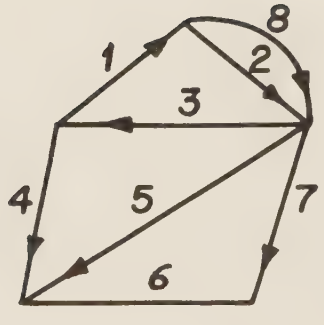
Seuls 1 et 10 sont à la fois c-contractables dans G,

4 devient une boucle que l'on supprime.

On obtient un seul graphe minimal G_m isovalent



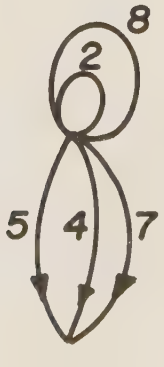
Exemple 4



Les cycles à considérer sont : 2/8, 34/5, 125/4, 346/7.

Les autres sont absorbés

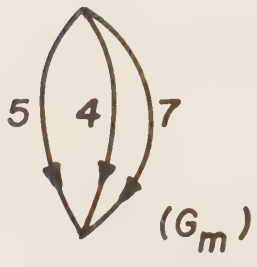
E = 2.8.5.4.7



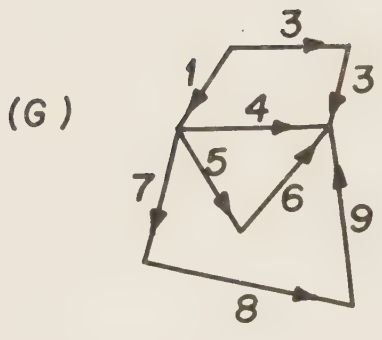
Le graphe minimal est Gm

G contient des circuits,

G_m n'en contient pas.



Exemple 5



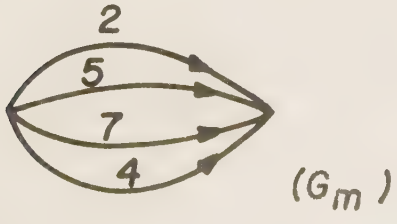
G est sans circuit

Les demi-cycles minimaux pour l'absorbsion sont :

2.3,4,5.6,7.8.9

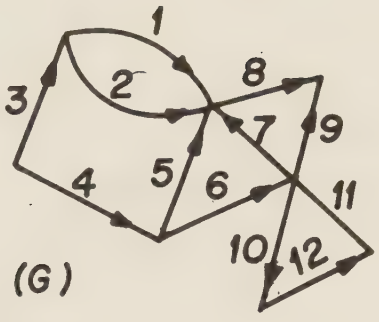
E = (2+3)4.(5+6)(7+8+9)

E fournit 12 graphes minimaux isomorphes à G_m :



Gm est sans circuit

Exemple 6



G est sans circuit

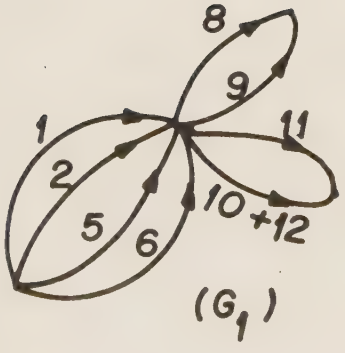
Les demi-cycles minimaux pour l'absorbsion sont:

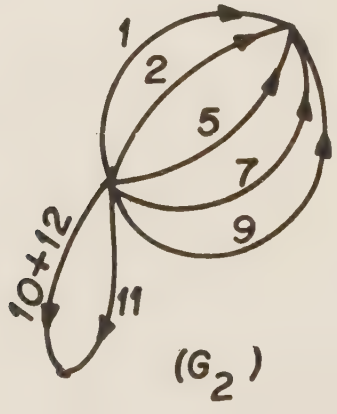
1,2,5,6.7,7.8,9,10.12,11

E = 1.2.5.9.11(6+7)(7+8)(10+12)

E fournit 4 graphes minimaux deux à deux isomorphes à G_1 et G_2

12.5.9.11.6.8.10
1.2.5.9.11.6.8.12
1.2.5.9.11.7.10
1.2.5.9.11.7.12





Les notions générales sur la contraction d'arcs et la suppression d'arcs vont être particularisées dans les graphes sans circuits. C'est le thème du chapitre II où l'on introduit,en outre, la notion d'écoulement entre source et puits d'un graphe orienté sans circuits.

CHAPITRE - II

GRAPHES ORIENTES SANS CIRCUIT

OPERATIONS ET ECOULEMENTS

On s'intéresse aux graphes complètement orientés sans circuit.
On étudie sur ces graphes diverses opérations :

- la suppression d'arcs
- la contraction d'arcs
- la réduction qui consiste à simplifier le graphe sans créer source, puits ou circuit par contraction d'arcs, et la réduction totale qui est une "fonction de bord" suivie d'une réduction.
  On montre que les graphes obtenus à partir d'un même graphe par réduction sont isomorphes.

- La mise en série et en parallèle de graphes.

On introduit la notion d'écoulement entre sources et puits d'un tel graphe. On montre qu'ils forment un treillis. Les premières propriétés de ces treillis liées aux opérations précédemment définies sont ensuite examinées :

- la réduction d'un graphe conserve son treillis d'écoulement
- la mise en parallèle de deux graphes G_1 et G_2 correspond au produit direct de leur treillis des écoulements et la mise en série correspond au produit contracté des treillis.

Dans ce chapitre G désigne un graphe connexe complètement orienté sans circuit (les résultats présentés étant valables sur chaque constituant connexe d'un graphe orienté sans circuit).

On définit le bord de G :

- le S-bord de G est l'ensemble des sources et des puits de G, noté $B_S(G)$.
- Le A-bord de G est l'ensemble des arcs-source et des arcs-puits de G, noté B(G).

- Le bord de G est non vide

Contre exemple dans le cas où le graphe a des circuits :

Ce graphe est isovalent.

$B(G) = B_S(G) = \Phi$

On rappelle qu'une rivière est un chemin ayant pour origine une source et pour extrêmité un puits.

- Par tout arc de G il passe une rivière

Contre exemple dans le cas ou le graphe a des circuits :

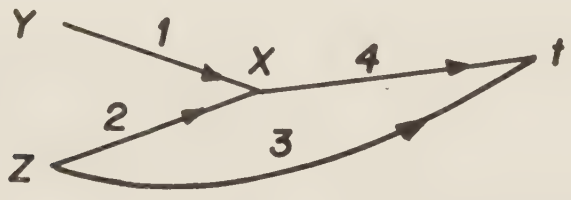
Par α il ne passe aucune rivière.

I - OPERATIONS DANS UN GRAPHE : suppression d'arcs
contraction d'arcs
réduction, fusion du bord,
réduction totale.

I-1 - Suppression d'arcs

Rappel : Un arc est dit suppressible (1-suppressible) si et seulement si sa suppression ne crée ni source ni puits.

Exemple :



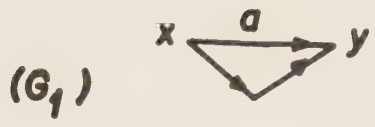
1 est suppressible car y était source (et le reste en devenant aussi puits)
2 " car z était source
3 " car z était source et puits
4 est non suppressible car x devient puits alors qu'il n'était ni source ni puits.

Rappel : Condition pour qu'un arc soit suppressible

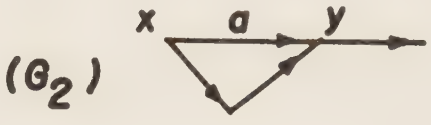
$$a = (x,y) \text{ est suppressible} \iff \frac{(d^-(x) = 0 \text{ ou } d^+(x) > 1)}{(d^+(y) = 0 \text{ ou } d^-(y) > 1)} \quad \text{et}$$

Dans un graphe G orienté les arcs suppressibles sont suppressibles de seconde espèce sauf ceux qui ont pour origine une source et pour extrémité un puits qui sont suppressibles de première espèce.

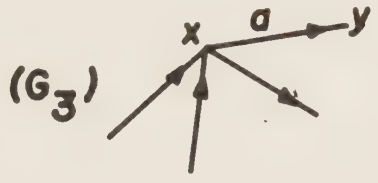
Exemple :



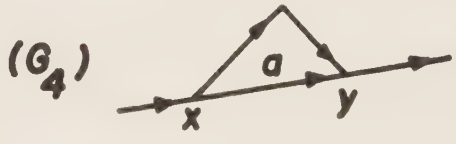
a est suppressible de première espèce dans G_1 : $d^-(x) = d^+(y) = 0$.



a est suppressible de seconde espèce dans G_2 : $d^-(x) = 0$, $d^-(y) > 1$



a est suppressible de seconde espèce dans G_3 : $d^+(x) > 1$ et $d^+(y) = 0$



a est suppressible de seconde espèce dans G_4 : $d^+(x) > 1$, $d^-(y) > 1$.

Rappels sur la suppressibilité : aS et la compatibilité : abC

(cf. chapitre I)

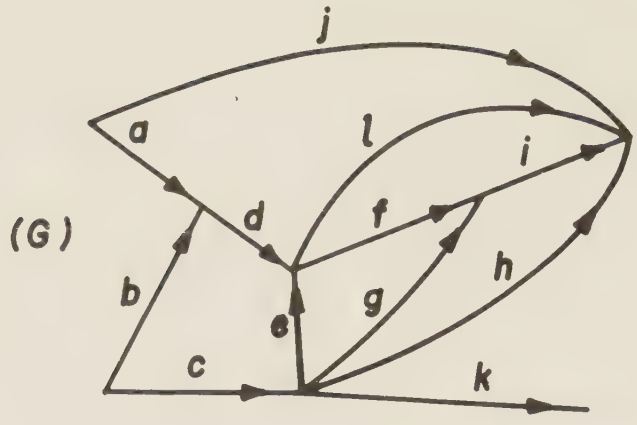
1) abC => aS

2) aS_1 et bS => abC et baC

3) abC = baC

4) La suppression d'un arc suppressible conserve les arcs non suppressibles et crée au plus 2 arcs non suppressibles.

Exemple :



1) on a : ghC => gS

2) " : jS_1 et aS => jaC et ajC

3) " : geC <=> egC

4) " : lS_2, fS_2, gS_2

La suppression de f rend l et g non suppressible.

La suppression de l rend f non suppressible et réciproquement.

" : jS_1

La suppression de j ne peut créer d'arcs non suppressible.

I-2 - Contraction d'arcs

Propriété 1

Un arc non-suppressible est c-contractable

(cf. Chapitre I : définition d'un arc c-contractable).

Démonstration : Soit a = (x,y) non suppressible.

On a entre autre $d^+(x) = 1$ ou $d^-(y) = 1$, car sinon "$d^+(x) > 1$ et $d^-(y) > 1$" implique "a suppressible".

L'hypothèse "$d^+(x) = 1$ ou $d^-(y) = 1$" entraîne qu'il n'existe pas d'autre chemin que a joignant x à y. a est donc c-contractable par définition.

Corollaire :

Par contraction d'un arc non suppressible, un graphe complètement orienté sans circuit reste sans circuit.

On considère la relation binaire interne à l'univers U des arcs de G :

abD : b est non suppressible dans G et a est suppressible après contraction de b.

Et l'on rappelle que la relation aS signifie "a est suppressible dans G."

Propriété 2

| aS => abD |

Un arc suppressible reste suppressible après contraction d'un arc non suppressible.

En effet par contraction d'un tel arc les demi-degrés ne peuvent diminuer

Sous certaines hypothèses la relation D est symétrique :

Propriété 3

(non(bS) et baD) <=> (non(aS) et abD)

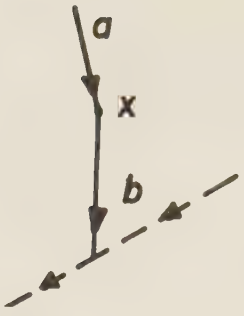
De plus les contractions successives de a et b conduisent au même graphe quelque soit l'ordre dan lequel on les effectue.

Démonstration : Il suffit de montrer l'implication dans un seul sens. Supposons qu'on ait non (bS) et baD.

baD entraîne par définition : non(aS).

Les 2 hypothèses réunies "non(bS) et baD" entraîne que a et b ont exactement un sommet commun x.

La seule configuration possible est :



avec $d^+(x) = d^-(x) = 1$, du à non(aS).
Dans cette configuration on a : abD , a et b jouent des rôles symétriques.

c.q.f.d.

I-3 - Réduction d'un graphe G

On rappelle que G est complètement orienté et sans circuit.
Le but est de simplifier G sans créer ni source, ni puits, ni circuit.

Définition : Un graphe est dit réduit si tous ses arcs sont suppressibles.
Ce résultat s'obtient par contractions successives d'arcs non suppressibles, qu'on appelle réduction.

Propriété 1

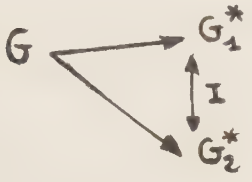
La réduction d'un graphe G ne crée ni source, ni puits, ni circuits

car
* si G^* est un graphe réduit de G, G et G^* ont même bord $B(G) \simeq B(G^*)$.
* G est sans circuit. Un arc non suppressible est c-contractable ; donc par contraction de tels arcs G reste sans circuit.

Propriété 2

La réduction est indépendante de la manière d'opérer.

- Les graphes obtenus par réduction à partir de G sont isomorphes.
- C'est une conséquence de la propriété II-1-2



I est un isomorphisme de G_1^* sur G_2^* quelques soient les réductions R_1 et R_2

On note $\boxed{G^*}$ le graphe réduit de G.

Propriété 3

Le nombre de contractions à effectuer pour réduire G est égal au nnombre de sommets tels que $d^+(x) = 1$ et $d^-(x) \neq 0$

+ nombre de sommets (différents de x) tels que $d^-(y) = 1$ et $d^+(x) \neq 0$
- nombre d'arcs joignant x à y mais ne joignant pas y à x.

En effet en niant la condition pour qu'un arc soit suppressible on obtient la caractérisation d'un arc non suppressible :

a = (x,y) est non suppressible <=> [($d^+(x) = 1$ et $d^-(x) \neq 0$) ou bien ($d^-(y) = 1$ et $d^+(y) \neq 0$)].

Exemple 1

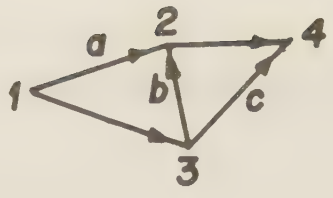
(G)

$d^+(2) = 1$ et $d^-(2) \neq 0$

Un arc à contracter pour réduire G.

Exemple 2

(G)

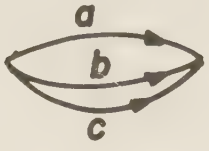


$d^+(2) = 1$ et $d^-(2) \neq 0$

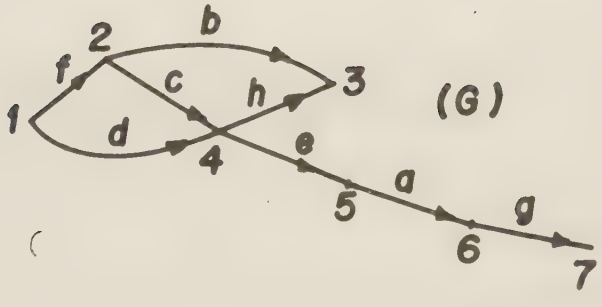
$d^-(3) = 1$ et $d^+(3) \neq 0$

Aucun arc ne joint 2 à 3. Deux arcs à contracter pour réduire G

(G^*)



Exemple 3



$d^-(2) = 1$ et $d^+(2) \neq 0$

$d^-(5) = 1$ et $d^+(5) = 1$

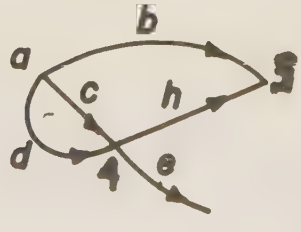
$d^-(6) = 1$ et $d^+(6) = 1$

(a joint 5 à 6 mais $d^-(5) = d^+(6) =$

Cet arc n'est pas à déduire.

D'où 3 arcs à contracter pour réduire G.

(G^*)

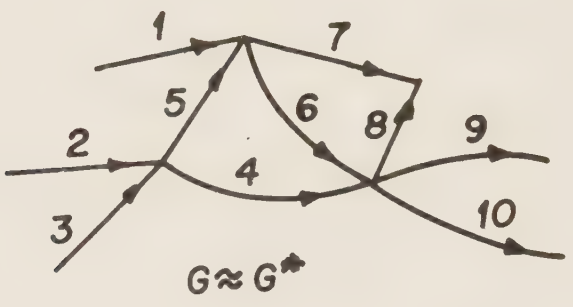


Graphe réduit et compatibilité des suppressions

On rappelle que la relation a S dans l'ensemble des arcs de G signifie a est suppressible dans G et que la relation abC signifie : b est suppressible dans G et a est suppressible dans G privé de b.

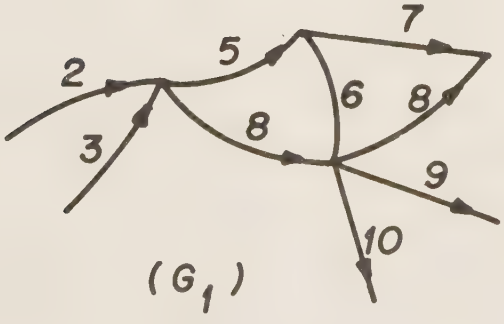
Application à la réduction de graphes partiels, obtenus à partir de G par suppression d'un arc non suppressible, de la symétrie de la relatio abC.

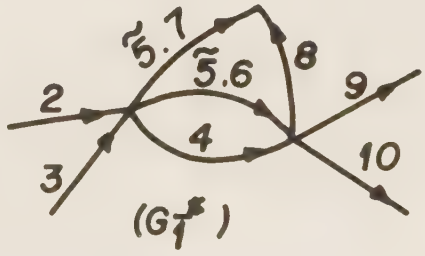
Considérons un graphe G réduit :



Tout arc de G est suppressible : $\forall n \in \{1,\ldots,10\}$ on a : nS.

- Supprimons de G l'arc 1 et réduisons le graphe $G_{\bar{1}}$ obtenu.

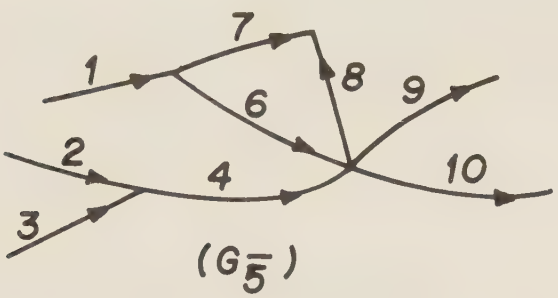


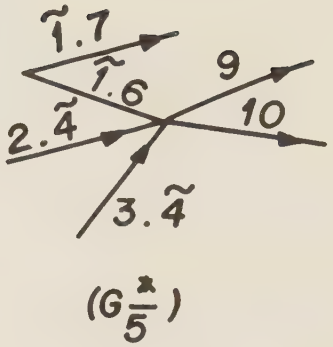


($G_{\bar{1}}$) 5 est non suppressible dans $G_{\bar{1}}$.

On en déduit : 1 est non suppressible dans $G_{\bar{5}}$.

- Supprimons de G l'arc 5 et réduisons $G_{\bar{5}}$

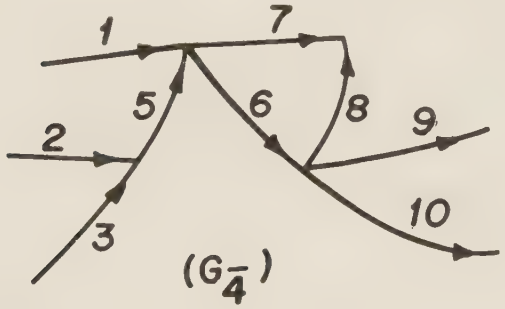


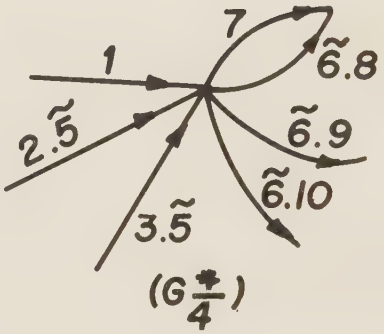


On a de plus : 4 non-suppressible dans $G_{\bar{5}}$

Donc 5 est non-suppressible dans $G_{\bar{4}}$

- Supprimons de G l'arc 4 et réduisons $G_{\bar{4}}$

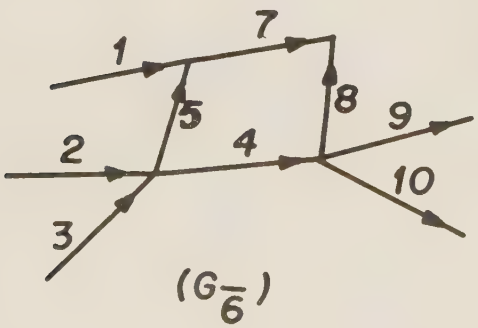


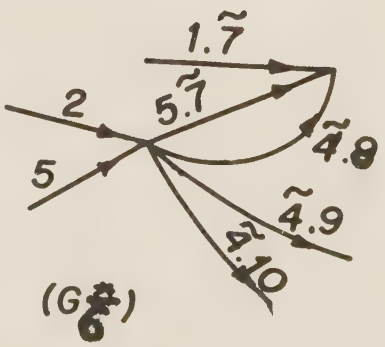


On a de plus : 6 non-suppressible dans $G_{\bar{4}}$

Donc 4 est non suppressible dans $G_{\bar{6}}$

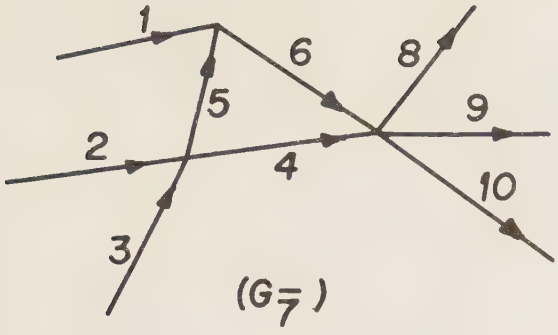
- Supprimons de G l'arc 6, réduisons $G_{\bar{6}}$

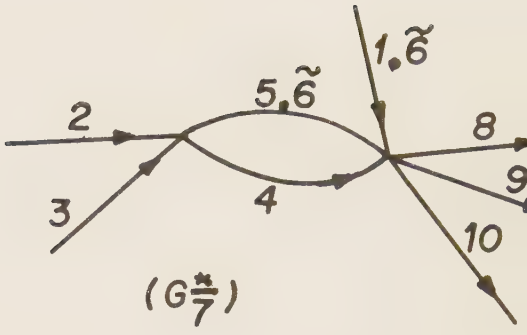




De plus 7 est non-suppressible dans $G_{\bar{6}}$

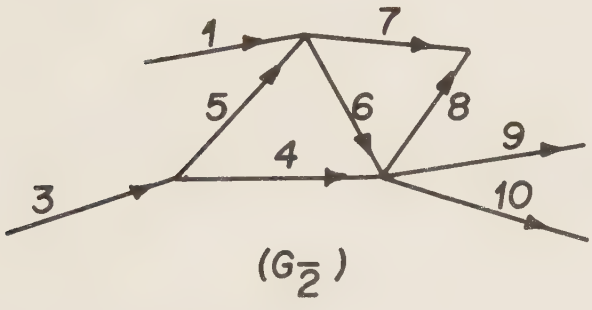
Donc 6 est non suppressible dans $G_{\bar{7}}$.

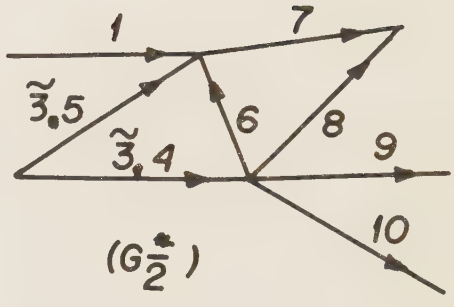




Seul 6 est non-suppressible dans $G_{\bar{7}}$

- Supprimons de G l'arc 2 et réduisons $G_{\bar{2}}$.

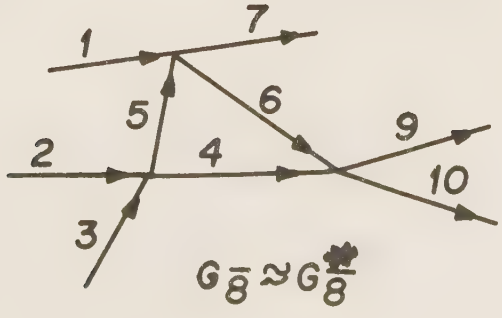




Arc non suppressible de $G_{\bar{2}}$: 3
Donc 2 est non suppressible dans $G_{\bar{3}}$.

- Supprimons de G l'arc 3. On obtient $G_{\bar{3}}$. 3 et 2 jouent des rôles symétriques dans G.

- Supprimons de G l'arc 8. Cette suppression ne crée aucun arc non suppressible. $G_{\bar{8}}$ est réduit.



- De même la suppression de l'arc 9 (resp. de l'arc 10) ne crée pas d'arc non suppressible.

$$G_{\bar{9}} \tilde{\sim} G^{*}_{\bar{9}}$$

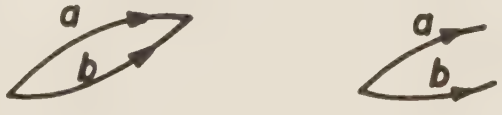
$$G_{\bar{10}} \tilde{\sim} G^{*}_{\bar{10}}$$

On rappelle qu'une file compatible est une suite d'arcs suppressibles de G : $a_1,\ldots,a_p$ telle que a_1 est suppressible dans G
et a_{i+1} est suppressible dans G privé de $a_1,\ldots,a_i$
quelque soit $i = 1,\ldots,p-1$.

Propriété 4

Si G est réduit, tout sous-ensemble de l'ensemble des arcs d'une rivière r de G est une file compatible.

En effet, quelque soit l'arc a de G on a : aS.
Les configurations pouvant créer un arc non suppressible b par suppression de a sont :



dans lesquelles a et b n'appartiennent pas à une même rivière.

c.q.f.d.

Considérons la relation de compatibilité abC sur l'ensemble des arcs d'un graphe G et le graphe symétrique K de compatibilité défini par

$$K = (V,A).$$

- Chaque sommet v_i de V est l'image d'un arc a_i de G.
- Deux sommets v_i et v_j de K sont jointifs si et seulement si : $a_i\ a_j C$.

Propriété 5

Le graphe de compatibilité associé à la relation de compatibilité C définie sur l'ensemble des arcs d'un graphe G réduit est connexe.

Démonstration : G = (X,U).

Quel que soit a dans V, on a : aS.

G a au moins une source et un puit, on peut donc trouver dans G :

- soit un arc a joignant une source et un puit
- soit 2 arcs consécutifs a et b satisfaisant à la condition : il n'y a pas d'arc joignant l'origine de a et l'extrêmité de b (car G est sans circuit et fini).

Dans le premier cas, a est suppressible de première espèce, donc quel que soit l'arc d de U, on a :

ad C

et K est connexe.

Dans le second cas, a et b appartiennent à une même rivière, on a donc abC (propriété 3).

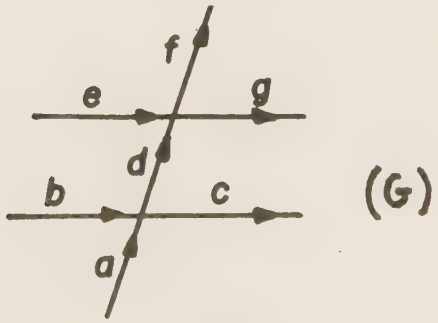
De plus quel que soit l'arc d de U on a :

daC ou dbC

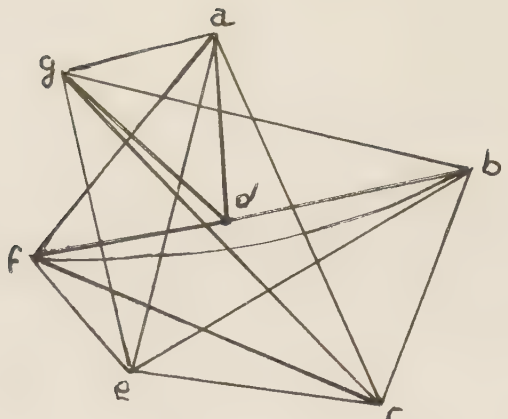
car la suppression dæ d ne peuvent rendre à la fois a et b non suppressibl (d'après l'hypothèse d ne joint pas l'origine de a et l'extrêmité de b).

K est donc connexe.

Exemple :



G est réduit. d et b vérifient l'hypothèse du second cas.



(K)

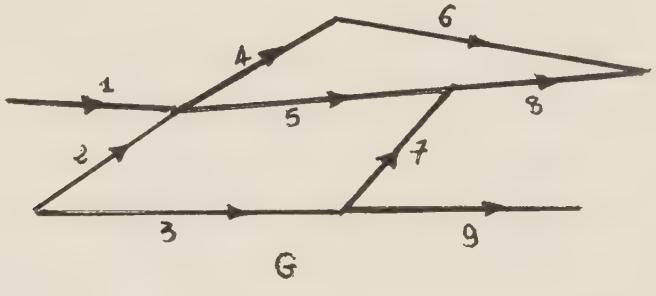
K est connexe

Définition d'un ordre sur les arcs de G - Ordre induit sur G^*

G étant sans circuit on peut ordonner ses arcs en conformité avec la relation de descendance : (1)

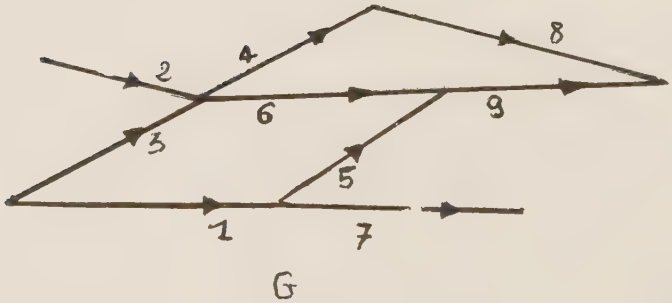
b est descendant de a $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ n°b > n°a

Exemple :



G

ou bien



G

etc...

Ordre induit sur G^*

Si a est non suppressible dans G

ou bien a est seul prédécesseur de ses successeurs $\{b_i\}_{i=1,\ldots,k}$
Après contraction de a dans G, les marques sont identiques aux précédentes sauf a qui disparait et b_i qui devient $\tilde{a}.b_i$, $\forall i = 1,\ldots,k$

Dans ce cas on dit que a est non suppressible de type prédécesseur.

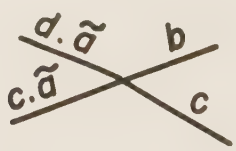
ou bien a est seul successeur de ses prédécesseurs $\{c_i\}_{i=1,\ldots,\ell}$
Après contraction de a dans G, les marques sont identiques aux marques précédentes sauf a qui disparait, et c_i qui devient $c_i.\tilde{a}$, $\forall i = 1,\ldots,l$.

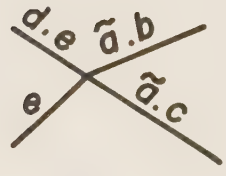
Dans ce cas a est dit non-suppressible de type successeur.

ou bien a est non suppressible à la fois de type prédécesseur et successeur.
Dans ce cas on a le choix des marques d'un type ou de l'au

ex :

ou





Et ainsi de suite jusqu'à réduction de G (c'est-à-dire jusqu'à ce que tout arc soit suppressible).

Après contractions successives d'arcs non suppressibles, on obtient des arcs de la forme $\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{k-1}.a_k.\tilde{a}_{k+1},\ldots\tilde{a}_n$ que nous désignons par arc composé.

Un arc composé contient une et seule marque non surlignée.

L'ordre défini sur les arcs composés est l'ordre compatible avec la relation de descendance (1), de sorte que :

$$\tilde{a}_1,\ldots,a_k,\ldots\tilde{a}_n < \tilde{b}_1,\ldots,b_j,\ldots\tilde{b}_p$$

$$<=>$$

$$b_j > a_i \quad \text{quel que soit } i = 1,\ldots,n$$

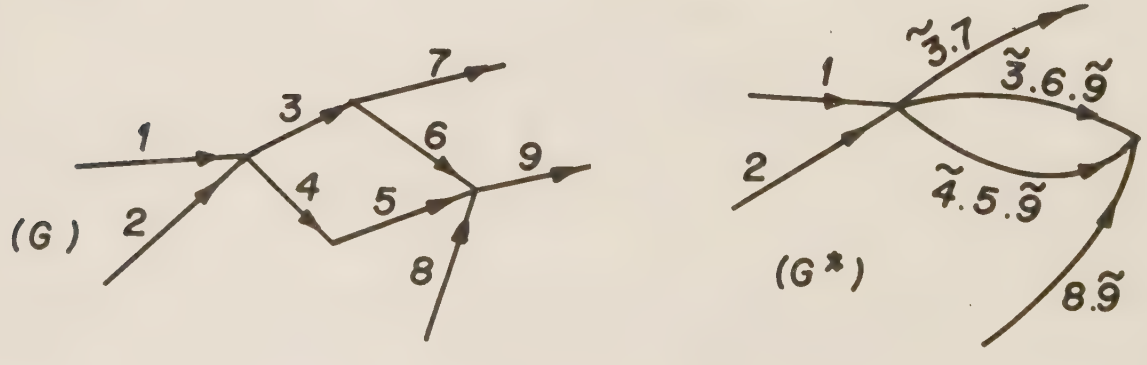
Le marquage ici défini conserve à chaque étape des contractions les rivières de G et n'en crée aucune autre ; ce qui permet d'énoncer le résultat suivant :

Propriété 5

La réduction conserve l'ensemble des rivières d'un graphe

L'ensemble des rivières de G est isomorphe à l'ensemble des rivières de G^*.

Exemple :



L'ensemble des rivières de G est {137, 1369, 1459, 237, 2369, 2459, 89}

Celui de G^* est {1$\tilde{3}$7, 1$\tilde{3}$6$\tilde{9}$, 1$\tilde{4}$5$\tilde{9}$, 2$\tilde{3}$7, 2$\tilde{3}$6$\tilde{9}$, 2$\tilde{4}$59, 8$\tilde{9}$ }

Ceci tient au fait que les arcs contractés sont non suppressibles et la propriété est mise en défaut si l'on contracte un arc suppressible.

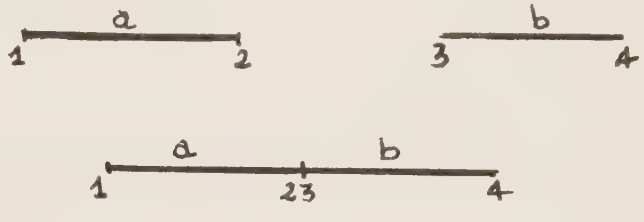
Supposons que l'on contracte l'arc non suppressible 6 de G. Dans ce cas on crée une rivière : 87 entre autre.

I-4 - Mise en série ou en parallèle de deux graphes orientés sans circuits : graphe série parallèle et graphe pseudo série parallèle.

a) Mise en série

Mise en série de deux arcs

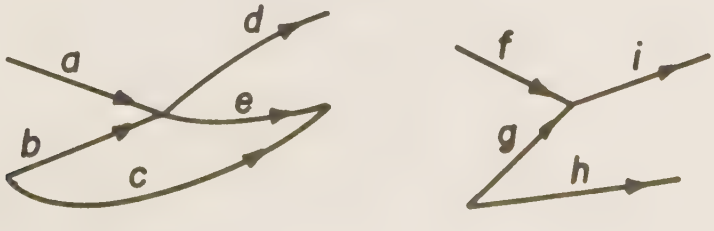
Définition 1 : La mise en série de deux arcs a et b, notée a "∿" b, consiste à identifier l'extrêmité de a et l'origine de b.



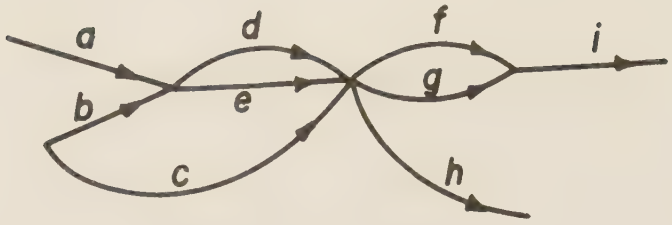
Mise en série de deux graphes orientés sans circuit.

Définition 2 : La mise en série de 2 graphes G_1 et G_2, notée G_1 "∿" G_2 consiste à identifier les puits de G_1 et les sources de G_2 en un seul sommet.

Exemple :



(G_1) (G_2)

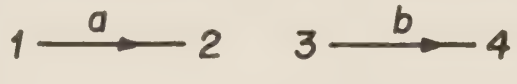


G_1 "~" G_2

b) Mise en parallèle

Mise en parallèle de deux arcs

Définition 3 : La mise en parallèle de deux arcs a et b, notée a "||" consiste à identifier l'origine de a et l'origine de b d'une part, l'extrêmité de a et l'extrêmité de b d'autre part.



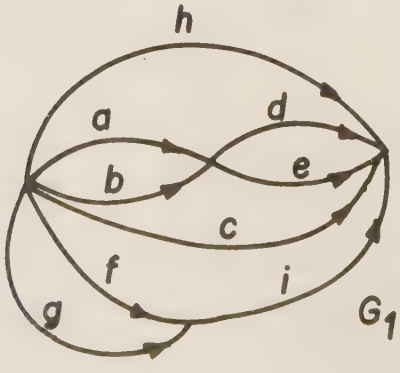
(a "||" b)

Mise en parallèle de deux graphes orientés sans circuit.

Définition 4 : La mise en parallèle de deux graphes G_1 et G_2, notée G_1 "||" G_2 consiste à identifier les sources de G_1 et les sources de G_2 d'une part, les puits de G_1 et les puits de G_2 d'autre part.

Exemple :

En considérant les graphes précédents G_1 et G_2, on a :

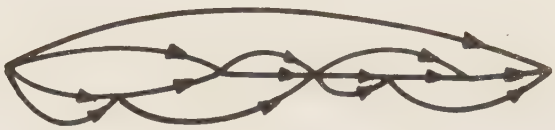


G_1 "||" G_2)

On sait qu'un graphe obtenu par récurrence à partir des opérations considérées dans les définitions 1 et 3 est dit : série-parallèle.

Par analogie on dira qu'un graphe obtenu par récurrence à partir d'opérations considérées dans les définitions 2 et 4 est pseudo série-parallèle.

Exemple :

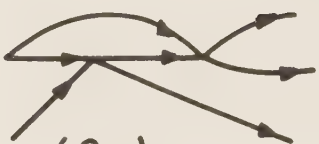


(G)

G est pseudo série-parallèle.

$G \tilde{\sim} (G_1 \text{ "}\sim\text{" } G_1) \text{ "}\|\text{" } G_2$

où



(G_1)

et

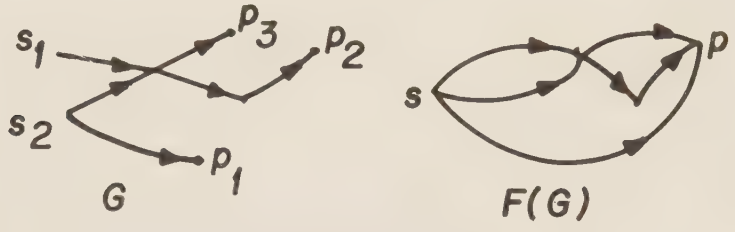
(G_2)

Mais G n'est pas série-parallèle.

Tout graphe n'est pas pseudo série-parallèle : (G_1 ne l'est pas).

I-5 - Fusion du bord d'un graphe G

Définition 1 : La fusion F du bord d'un graphe G est la transformation qui consiste à identifier ses sources en une seule source et ses puits en un seul puits en conservant la relation de descendance dans G.



Propriété 1

Un arc a est [non] suppressible dans F(G) si et seulement si il est [non] suppressible dans G.

Propriété 2

Si un graphe G est série-parallèle, alors F(G) = G.

C'est évident car un graphe série-parallèle n'a qu'une source et qu'un puits.

I-6 - Réduction totale d'un graphe G

Définition 1 : La réduction totale d'un graphe est le produit de sa réduction R et de la fusion de son bord : F.
Le graphe obtenu est dit totalement réduit. On le note $\overset{\circ}{G}^{*}$

$$R \circ F = F \circ R$$ (corollaire de la propriété 1, § 5).

Exemple :

Exemple :

Définition 2 : Un graphe est dit série-parallèle généralisé si son gra totalement réduit est série parallèle.

Exemple :

G est série parallèle généralisée.

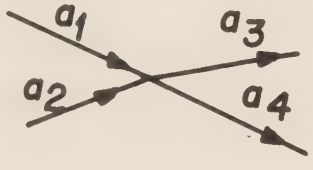
II - NOTION D'ECOULEMENT ENTRE SOURCE ET PUITS, D'UN GRAPHE

Rappelons que G = (X,U) est un graphe orienté sans circuit.

II-1 - Ecoulement de G (entre sources et puits) : définition

Définition 1 : Un écoulement de G est un ensemble de rivières de G, tel qu'on ne puisse lui ajouter de rivières sans leur ajouter d'arc.

Exemple :



$\{a_1\ a_3, a_1\ a_4\}$ est un écoulement de G.

$\{a_1\ a_3, a_2\ a_4\}$ n'est pas un écoulement car on peut lui ajouter les rivières a_1a_4 et a_2a_3 sans lui ajouter d'arcs.

Toute rivière d'un graphe G sans circuit est un écoulement ainsi que l'ensemble des rivières de G.

Définition 2 : On définit sur l'ensemble des écoulements de G la relation d'inclusion.
Soient E_1 et E_2 deux écoulements de G :

$E_1 \subset E_2$ <=> toute rivière de E_1 appartient à E_2

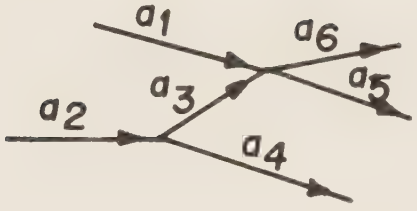
II-2 - Union d'écoulements

Définition 3 : Soient E_1 et E_2 deux écoulements de G.

L'écoulement $E_1 \cup E_2$ est : i) l'ensemble des rivières de G réalisé au moyen de l'union ensembliste des arcs de E_1 et E_2,

c'est aussi : ii) l'écoulement minimal par inclusion contenant E_1 et E_2.

Exemple :



$E_1 = \{a_1 a_6, a_2 a_3 a_6\}$.

$E_2 = \{a_1 a_5\}$.

$E_1 \cup E_2 = \{a_1 a_6, a_2 a_3 a_6, a_1 a_5, a_2 a_3 a_5\}$.

Les définitions i) et ii) sont équivalentes.

En effet, soit E' l'écoulement défini par i) et E" celui défini par ii)

E' est un écoulement

$E' \supset E_1$

$E' \supset E_2$

donc $E' \supset E''$

$E'' \supset E_1$

$E'' \supset E_2$

donc E" contient l'uniton ensembliste des arcs de E_1 et de E_2

$E'' \supset E'$.

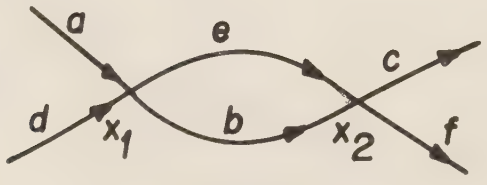
II-3 - Conditions pour que 2, puis p rivières forment un écoulement

Propriété 1 - Deux rivières r_1 et r_2 forment un écoulement si et seulement si tout sommet x_k commun à r_1 et r_2 satisfait l'une des conditions suivantes :

i) les rivières r_1 et r_2 ont même tête par rapport à x_k

ii) les rivières r_1 et r_2 ont même queue par rapport à x_k

Exemple :



- $r_1 = aef$ $r_2 = abf$

  $T_{r_1}(x_1) = T_{r_2}(x_1) = a$

  $Q_{r_1}(x_2) = Q_{r_2}(x_2) = f$

  r_1 et r_2 forment un écoulement.

- $r'_1 = def$ $r'_2 = aec$

  $T_{r'_1}(x_1) = d \neq T_{r'_2}(x_1) = a$

  $Q_{r'_1}(x_1) = ef \neq Q_{r'_2}(x_1) = ec$

  r'_1 et r'_2 ne forment pas un écoulement.

Démonstration :

La condition suffisante est évidente.

Condition nécessaire : supposons qu'il existe un sommet x commun à r_1 et r_2 tel que :

$$Q_{r_1}(x) \neq Q_{r_2}(x)$$

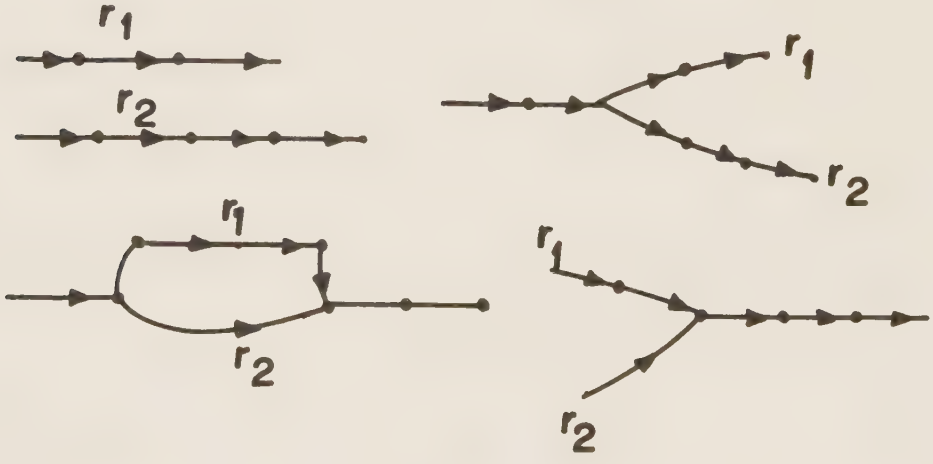
et

$$T_{r_1}(x) \neq T_{r_2}(x)$$

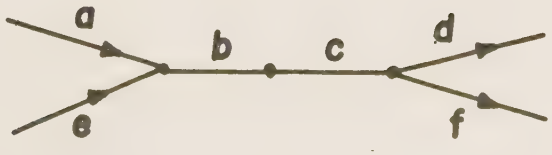
Alors $T_{r_1}(x)\, Q_{r_2}(x)$ est une rivière de G que l'on peut ajouter à l'ensemble $\{r_1, r_2\}$ sans ajouter d'arcs de G. Donc $\{r_1, r_2\}$ n'est pas un écoulement.

Propriété 2 : Deux rivières r_1 et r_2 forment un écoulement si et seulement si leurs arcs non communs forment un intervalle sur chacune des deux rivières.

On a en effet 4 configurations possibles :



Contre exemple:

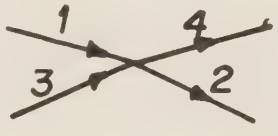


$r_1 = a\,b\,c\,d$ $r_2 = e\,b\,c\,f$

Les arcs non communs à r_1 et r_2 forment 2 intervalles sur r_1 et r_2
$\{r_1, r_2\}$ n'est pas un écoulement.

Corollaire : Deux rivières ne forment pas un écoulement si et seulement si leurs arcs non communs forment n intervalles (avec n > 1) sur chacune des deux rivières.

Exemple :



L'ensemble des rivières {14, 32} n'est pas un écoulement car leurs arcs non communs forment 2 intervalles sur chaque rivière :
les intervalles 1 et 4 sur la rivière 14
les intervalles 3 et 2 sur la rivière 32.

Propriété 3 : p rivières $r_1,\ldots,r_p$ forment un écoulement si et seulement si : $r_1 \cup \ldots \cup r_p = \{r_1,\ldots,r_p\}$; l'union des rivières étant prises au sens de l'union d'écoulements.

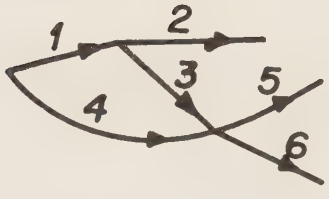
Démonstration : La condition est évidemment suffisante.
La condition nécessaire : $r_1 \cup \ldots \cup r_p$ est l'écoulement minimal qui contient $\{r_1,\ldots,r_p\}$. Si $\{r_1,\ldots,r_p\}$ est un écoulement on a l'égalité.

II-4 - Intersection d'écoulements

Définition 4 - Soient E_1 et E_2 deux écoulements de G.

L'écoulement $E_1 \cap E_2$ est i) l'ensemble des rivières communes à E_1 et E_2

c'est aussi:ii) l'écoulement maximal par inclusion contenu dans E_1 et E_2.



$E_1 = \{136\}$

$E_2 = \{12,45\}$

$E_1 \cap E_2 = \Phi$

II-5 - Support d'un écoulement

Définition 5 - Le support d'un écoulement est l'ensemble des arcs qu'il contient noté S(E).

Soit $A \subset U$ un ensemble d'arc de G.
Considérons l'application $A \rightarrow E(A)$ dont l'image est l'ensemble des rivières de G dont les arcs sont contenus dans A.

Propriété 4 - E(A) est un écoulement de G.

Propriété 5 - L'application $A \to S(E(A))$ est une fermeture pour la relation duale de l'inclusion.

Démonstration : $S(E(S(E(A)))) = S(E(A))$

$A \supset S(E(A))$

$B \supset A \Rightarrow S(E(B)) \supset S(E(A))$

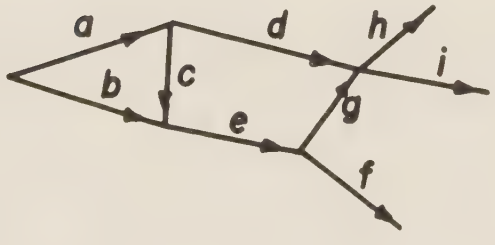
Propriété 6 - Soit E_1 un écoulement alors $E(S(E_1)) = E_1$

Soit E_2 un écoulement tel que $S(E_1) \subset S(E_2)$, alors $E_1 \subset E_2$.

Démonstration : Les écoulements E_1 et $E(S(E_1))$ ont même support d'après la propriété de fermeture, ils sont donc égaux.

$S(E_1) \subset S(E_2) \Rightarrow E(S(E_1)) \subset E(S(E_2))$
c'est-à-dire $E_1 \subset E_2$.

Exemple :



$A_1 = \{a,d,i,g,b\}$

$A_2 = \{a,d,i,b,c,f\}$

$A_3 = \{b,g,f,d\}$

$E(A_1) = E(A_2) = \{a\ d\ i\}$

$S(E(A_1)) = S(E(A_2)) = \{a,d,i\}$

$E(A_3) = \Phi = S(E(A_3))$

Propriété 7 - Le support de l'union de 2 écoulements E_1 et E_2 est l'union de leur support $S(E_1)$ et $S(E_2)$.

$$S(E_1 \cup E_2) = S(E_1) \cup S(E_2)$$

Le support de l'intersection de 2 écoulements est contenu dans l'intersection de leurs supports :

$$S(E_1 \cap E_2) \subset S(E_1) \cup S(E_2)$$

Démonstration : Pour l'union la propriété découle de la définition de l'union de 2 écoulements.

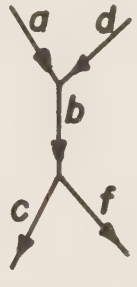
Pour l'intersection : $E_1 \supset E_1 \cap E_2$

$E_2 \supset E_1 \cap E_2$

donc $S(E_1) \cap S(E_2) \supset S(E_1 \cap E_2)$.

Mais la réciproque est fausse ;

Contre exemple :



$E_1 = \{abc\}$

$E_2 = \{dbf\}$

$S(E_1) \cap S(E_2) = \{b\}$

$S(E_1 \cap E_2) = \Phi$

Corollaire :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(A) \cup E(B) \subset E(A \cup B) \\ E(A) \cap E(B) = E(A \cap B) \end{array}}$$

Démonstration : $E(A) \cup E(B) \subset E(A \cup B)$?

$$\left.\begin{array}{l} E(A) \subset E(A \cup B) \\ E(B) \subset E(A \cup B) \end{array}\right] \Rightarrow S(E(A)) \cup S(E(B)) \subset S(E(A \cup B))$$

or

$S(E(A)) \cup S(E(B)) = S(E(A) \cup E(B))$ (propriété 7)

donc

$E(A) \cup E(B) \subset E(A \cup B)$ (propriété 6)

$E(A) \cap E(B) = E(A \cap B)$?

$S(E(A) \cap E(B)) \subset S(E(A)) \cap S(E(B) \subset A \cap B$ (propriété 7)

donc

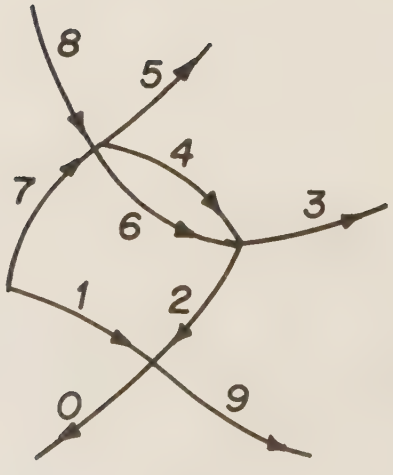
$E(S(E(A) \cap E(B)) \supset E(A) \cap E(B) \subset E(A \cap B)$ (propriété de fermeture)

Réciproquement, soit $r \in E(A \cap B)$
reste une rivière contenu dans $A \cap B$, donc r est une rivière de $E(A)$ et de $E(B)$, soit une rivière de $E(A) \cap E(B)$.

En définitive $E(A \cap B) = E(A) \cap E(B)$.

X

Exemple :



$A_1 = \{8,4,3,9\}$ $E(A_1) = \{843\}$

$B_1 = \{7,1,0,5,2\}$ $E(B_1) = \{10,75\}$

$E(A_1 \cup B_1) = \{85, 843, 8429, 8420, 743, 7429, 7420, 19, 10, 85, 75\}$

$E(A_1) \cup E(B_1) = \{843, 10, 743, 75, 85\}$

$A_2 = \{8,4,3,2,9\}$ $E(A_2) = \{843, 8429\}$

$B_2 = \{8,9,7,4,3\}$ $E(B_2) = \{843, 743\}$

$E(A_2 \cap B_2) = \{843\}$

$E(A_2) \cap E(B_2) = \{843\}$

II-6 - Treillis des écoulements

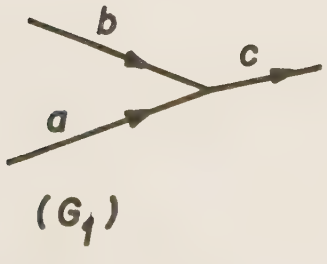
Les opérations $\cup$ et $\cap$ induisent sur l'ensemble des écoulements de G une structure de treillis.

L'ordre partiel est défini par :

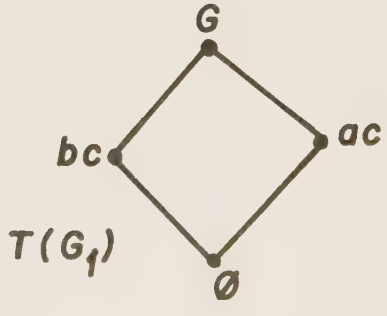
$E_1 \leq E_2 \iff E_1 \cap E_2 = E_1$

Nous notons $\boxed{T(G)}$ ce treillis.

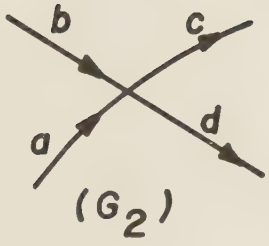
Exemple :



(G_1)

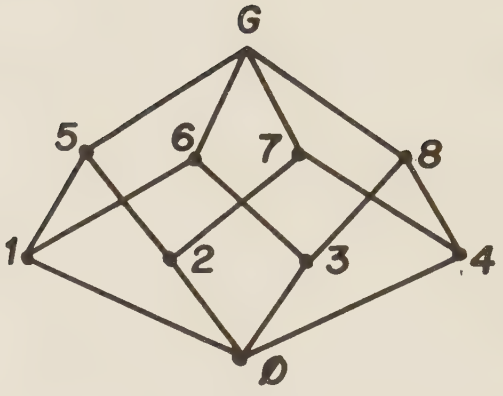


$T(G_1)$



(G_2)

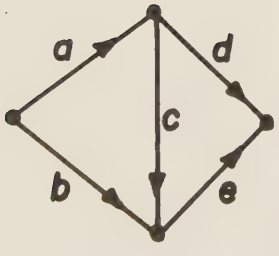
$T(G_2)$

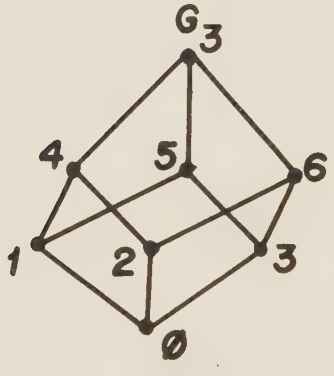


1 = bc
2 = bd
3 = ac
4 = ad

5 = {bc, bd}
6 = {bc, ac}
7 = {bd, ad}
8 = {ac, ad}

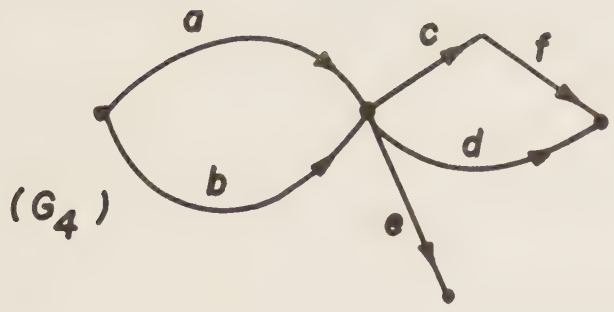
(G_3)

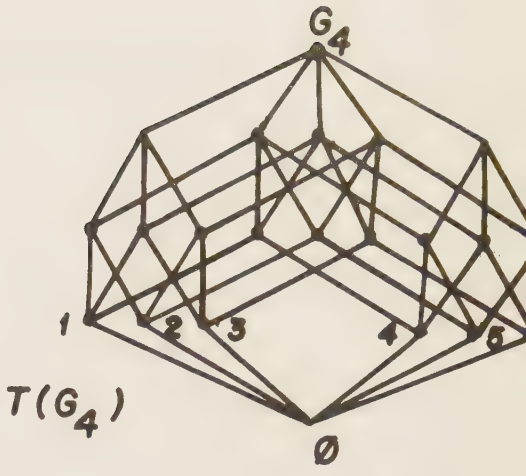




$T(G_3)$

1 = ad
2 = ace
3 = bc



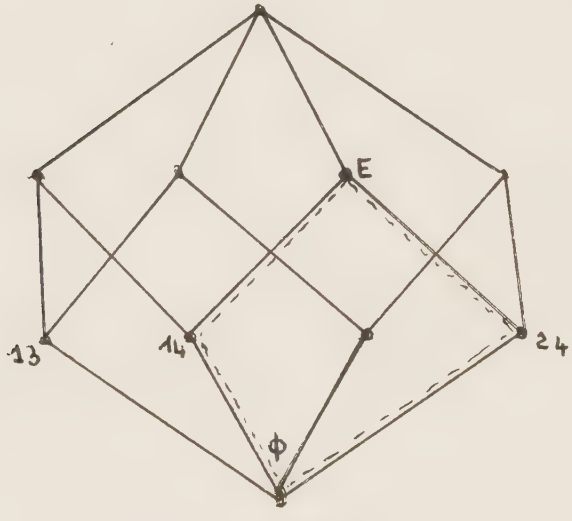


1 = acf 4 = bcf

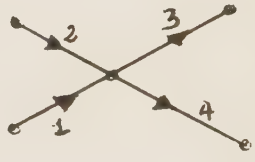
2 = ad 5 = bd

3 = ac 6 = be

Propriété - Quel que soit l'écoulement E de T(G), le sous treillis $[\Phi, E]$ est le treillis des écoulements du support de E.



T(G)



(G)

$S(E) = \{1,2,4\}$

III - EFFET SUR LES ECOULEMENTS DE LA SUPPRESSION D'ARCS, DE LA CONTRACTION D'ARCS ET DE LA REDUCTION (totale)

Rappels : Si K est un graphe orienté sans circuit on note K l'écoulement qui a pour support l'ensemble des arcs de K.

. $G_{\bar{a}}$ est le graphe obtenu par suppression de l'arc a de G et l'on a : $G_{\bar{a},\bar{b}}$ isomorphe à $G_{\bar{b},\bar{a}}$.

.$G_{\tilde{a}}$ est le graphe obtenu par contraction de l'arc a de G.

III-1 - Suppression d'arcs et écoulements

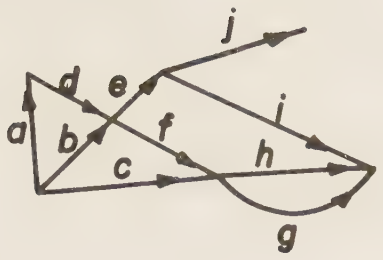
Propriété 1 - a est suppressible dans G $\Leftrightarrow$ $G_{\bar{a}}$ est le support d'un écoulement de G.

Démonstration : Pour tout arc de $G_{\bar{a}}$ il passe une rivière de G.
Sinon par suppression de a on aurait crée un puits ou une source.
C'est en contradiction avec l'hypothèse a suppressible.

$G_{\bar{a}}$ est formé de toutes les rivières contenues dans $G_{\bar{a}}$, c'est donc un écoulement. Les rivières de $G_{\bar{a}}$ sont des rivières de G ; $G_{\bar{a}}$ est donc un écoulement de G.
La condition est donc suffisante.
La condition nécessaire est évidence.

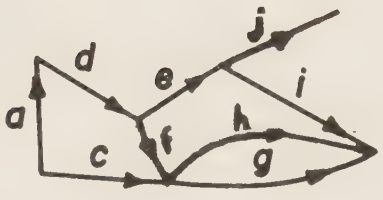
—X—

Exemple :



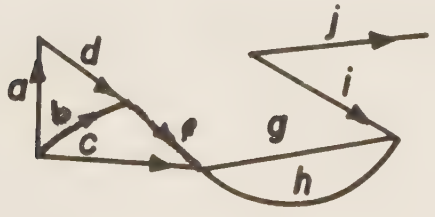
(G)

b est suppressible dans G



$(G_{\bar{b}})$

$G_{\bar{b}}$ est le support d'un écoulement de G.
e est non suppressible dans G



$(G_{\bar{e}})$

$G_{\bar{e}}$ n'est pas le support d'un écoulement de G.

Propriété 2 - Si G^-_a et G^-_b sont des écoulements de G et si b est suppressible dans G^-_a alors $G^-_a \cap G^-_b = G^-_{a,b}$

Démonstration : En effet dans ce cas $G^-_{a,b}$ est un écoulement de G d'après la propriété 1 et le fait que toute rivière de G^-_a est une rivière de G. On rappelle que S(E) désigne le support de l'écoulement E et U désigne l'ensemble des arcs de G.

$S(G^-_a) = U-\{a\}$ $\quad S(G^-_b) = U-\{b\}$

$S(G^-_a \cap G^-_b) \subset S(G^-_a) \cap S(G^-_b) = U-\{a,b\} = S(G^-_{a,b})$

donc $G^-_a \cap G^-_b \subset G^-_{a,b}$.

Réciproquement $G^-_{a,b} \subset G^-_a \cap G^-_b$ car toute rivière $r = a_1,\ldots,a_p$, où $a_i \neq a$ et $a_i \neq b$ $\forall i = 1,\ldots,p$, est une rivière de G^-_a et de G^-_b.

—x—

Théorème : Soit G un graphe réduit. Alors quel que soit une rivière r de G

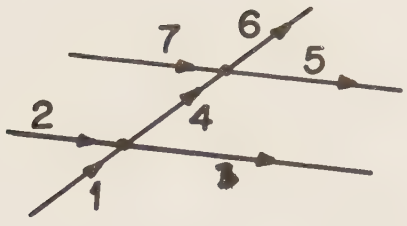
G privé d'un sous-ensemble quelconque des arcs de r est un écoulement de G.

G privé de l'ensemble des arcs de r est un écoulement de G.

C'est un corollaire de la propriété 1 précédente et de la propriété 3 § I.3.

—x—

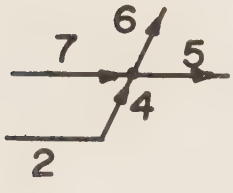
Exemple :



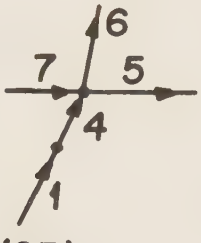
G est réduit

Les rivières de G sont : 13, 23, 145, 245, 75, 146, 246, 76.

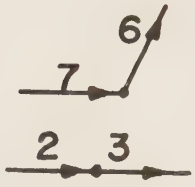
La suppression des arcs de chaque rivière fournit des écoulements de G



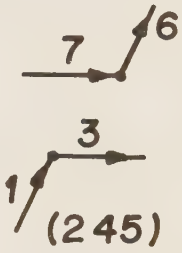
(13)



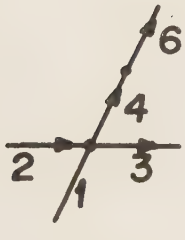
(23)



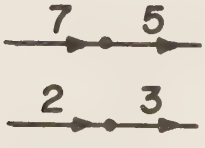
(145)



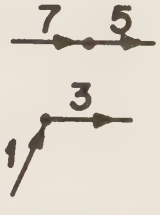
(245)



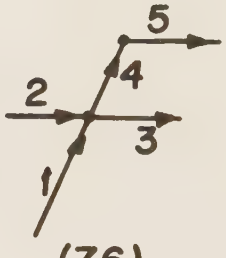
(75)



(146)

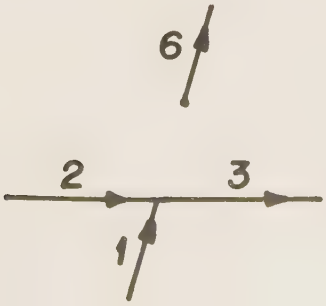


(246)



(76)

Par contre la suppression de l'ensemble des arcs 7, 4, 5 qui ne forme
ni une rivière ni un sous ensemble d'arcs d'une rivière ne fournit pas
un écoulement de G.



Propriété 3 : Supposons que $G^-_{a,b}$ soit un écoulement de G, alors G^-_a est un écoulement de G <=> G^-_b est un écoulement de G.

Démonstration : G^-_a est un écoulement de G si et seulement si on a : aS

$G^-_{a,b}$ est un écoulement de G et aS implique baC

baC implique bS

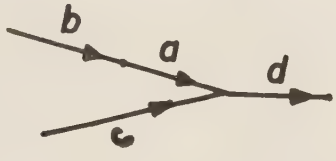
Donc G^-_b est un écoulement de G.

a et b jouent des rôles symétriques : $G^-_{a,b} \simeq G^-_{b,a}$

La propriété est donc une équivalence.

X

Contre exemple dans le cas où G^-_a n'est pas un écoulement de G.



$G^-_{a\ b}$ est un écoulement de G.

G^-_a n'est pas un écoulement de G donc G^-_b n'est pas un écoulement de G.

III-2 - Contraction d'arcs et écoulements

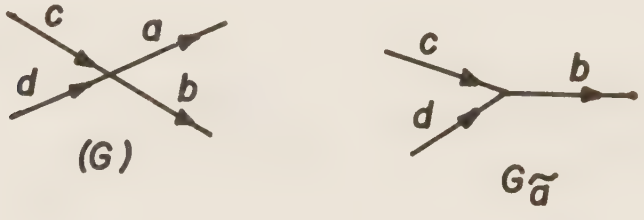
On suppose G marqué en conformité avec la relation de descendance (1) définie au § I.3 (rappelons que G est le support d'un écoulement que l'on note G (abus de langage)).
On dit qu'un écoulement E de G est isomorphe à l'écoulement G si et seulement si leurs rivières sont en bijection.

Propriété 1 - a non suppressible dans G <=> G_a est un écoulement isomorphe à G.

Démonstration : En effet il existe un marquage des arcs de $G_{\tilde{a}}$ tel que l'ensemble des rivières de $G_{\tilde{a}}$ soit isomorphe à l'ensemble des rivières de G. (voir § I.3)

Réciproquement : contractons dans G un arc suppressible a, montrons que $G_{\tilde{a}}$ n'est pas un écoulement isomorphe à G.

. Si a est un arc-source ou puits de G, $G_{\tilde{a}}$ est un écoulement de G strictement plus petit que G.



. Si a n'est ni arc-source ni arc-puits de G, $G_{\tilde{a}}$ n'est pas un écoulement de G car il existe au moins une rivière de $G_{\tilde{a}}$ non contenue dans G.

En effet, d'après la caractérisation par les demi-degrés des arcs suppressibles : a = (x,y) est tel que :

$$d^-(x) \neq 0,\ d^+(x) \geq 2$$

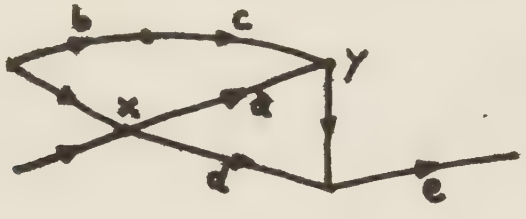
et

$$d^+(y) \neq 0,\ d^-(y) \geq 2$$

Soit C_1 un chemin de G, d'origine une source, d'extrêmité y ne contenant pas l'arc a (C_1 existe car G est sans circuit et $d^-(y) \geq 2$).

Il existe de même C_2 d'origine x et d'extrêmité une puits, ne contenant pas l'arc a.

C_1 C_2 est une rivière de $G_{\tilde{a}}$ qui n'appartient pas à G : l'écoulement $G_{\tilde{a}}$ n'est pas isomorphe à l'écoulement G.



(G)

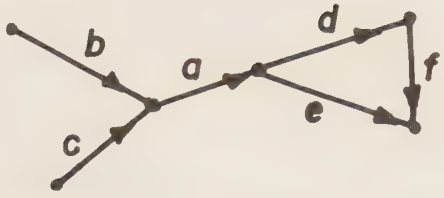
C_1 = bc
C_2 = de

($G_{\tilde{a}}$)

bcde est une rivière de $G_{\tilde{a}}$, sans être une rivière de G.

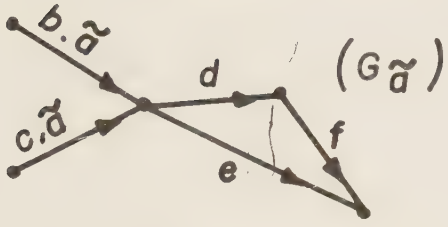
—X—

Exemple 1



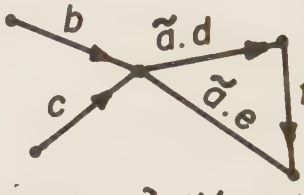
(G)

a est non suppressible dans G (des deux types)



$(G_{\tilde{a}})$

ou bien

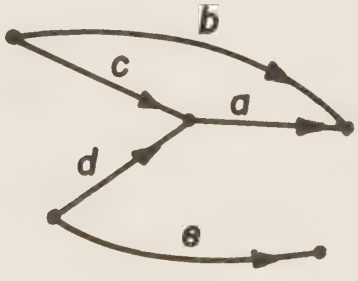


$(G_{\tilde{a}})$

Dans les deux cas l'écoulement $G_{\tilde{a}}$ est isomorphe à l'écoulement G

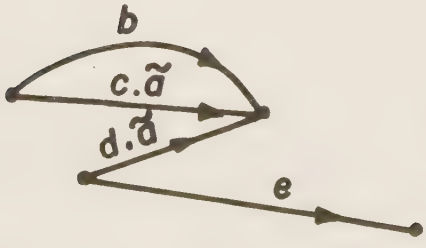
Exemple 2

E



(G)

a est non suppressible de type successeur dans G



$(G_{\tilde{a}})$

Les écoulements G et $G_{\tilde{a}}$ sont isomorphes.

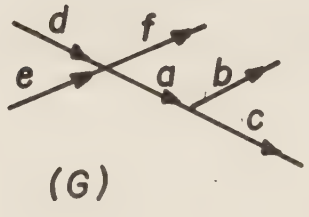
Propriété 2 - $G_{\tilde{a}} \tilde{\simeq} G$ (au sens des écoulements)

$G_{\bar{b}}$ écoulement de G.

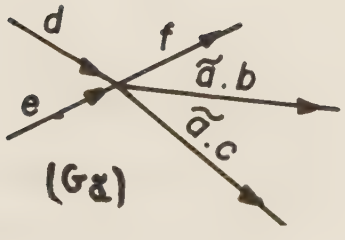
$\Rightarrow G_{\bar{b},\tilde{a}}$ est un écoulement de G isomorphe à $G_{\bar{b}}$

C'est un corollaire de la propriété 1 et des rappels du § I.1

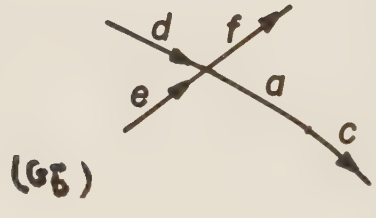
Exemple :



(G)



$(G_{\tilde{a}})$

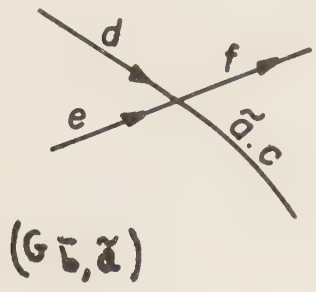


$(G_{\bar{b}})$

$(G_{\tilde{a}}) \tilde{\simeq} (G)$
au sens des écoulements

$G_{\bar{b}}$ est un écoulement de G

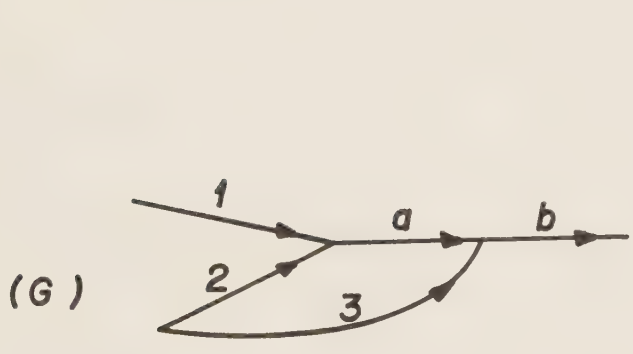
Alors $G_{\tilde{b},\tilde{a}}$ est un écoulement de G isomorphe à $G_{\tilde{b}}$

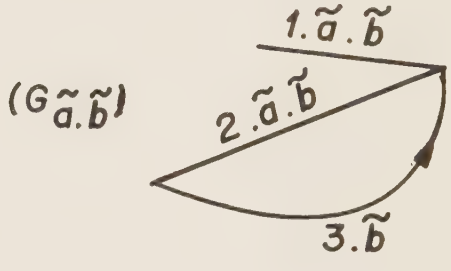


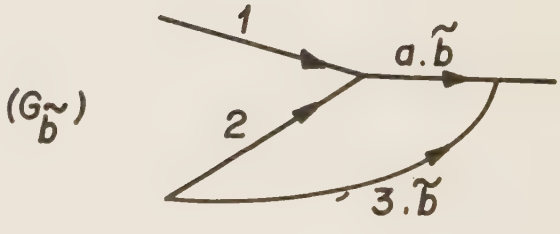
Propriété 3 - Si $G_{\tilde{a},\tilde{b}}$ est un écoulement isomorphe à G alors $G_{\tilde{b}}$ est un écoulement isomorphe à G.

(Corollaire de la propriété 3, § I.2).

Exemple :







Les rivières de G sont : 1ab
2ab
3b

Les rivières de $G_{\tilde{a},\tilde{b}}$ sont : $1\tilde{a}\tilde{b}$
$2\tilde{a}\tilde{b}$
$3\tilde{b}$

Celles de $G_{\tilde{b}}$ sont : $1a\tilde{b}$

$2a\tilde{b}$

$3\tilde{b}$

Généralisation : Si $G_{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_p}$ est un écoulement isomorphe à G alors $G_{\tilde{a}_{i_1},\ldots,\tilde{a}_{i_k}}$ est un écoulement isomorphe à G quel que soit la permutation $(i_1,\ldots,i_k)$ d'un sous-ensemble d'indices de $\{1,\ldots,p\}$.

Ceci est un corollaire de la propriété 2 et du fait que $G_{\tilde{a},\tilde{b}}$ est isomorphe à $G_{\tilde{b},\tilde{a}}$ (propriété 3 § 1.2).

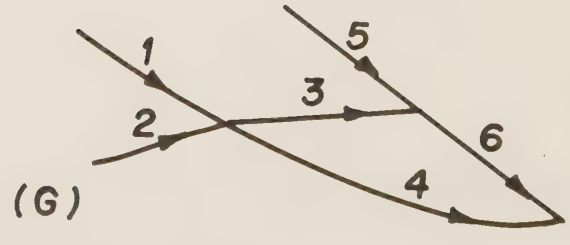
—X—

Propriété 4 : $G^-_{a,\tilde{b}}$ écoulement de G ; G^-_b écoulement de G $\Rightarrow$ G^-_a écoulement de G ; $G^-_{b,\tilde{a}}$ écoulement de G isomorphe à G^-_b.

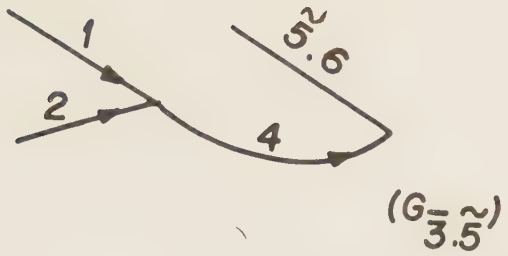
C'est un corollaire de la propriété 1 et de la symétrie dans certaines hypothèses de la relation abD vu au § I.2

—X—

Exemple :

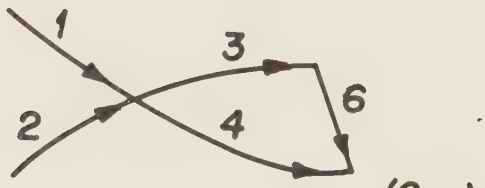


$G^-_{3,\tilde{5}}$ est un écoulement de G ;



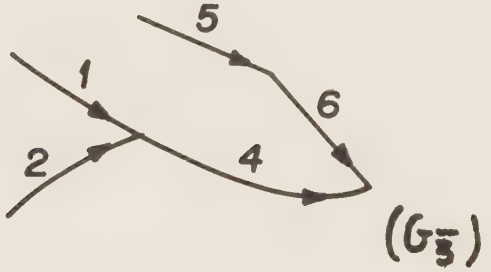
$(G_{\bar{3}.\tilde{5}})$

$G_{\bar{5}}$ est un écoulement de G :



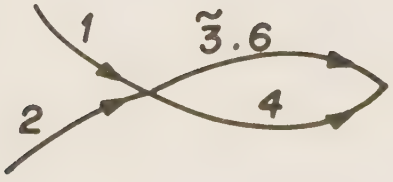
$(G_{\bar{5}})$

Alors $G_{\bar{3}}$ est un écoulement de G :



$(G_{\bar{3}})$

et $G_{\bar{5},\tilde{3}}$ est un écoulement isomorphe à $G_{\bar{5}}$:



$(G_{\bar{5},\tilde{3}})$

III-3 - Classes de E-equivalence

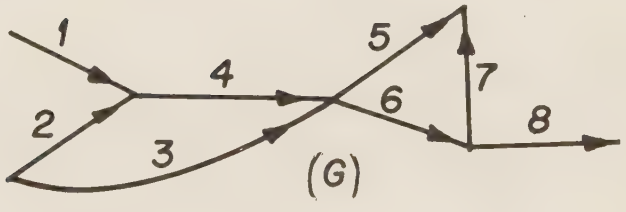
Théorème : Si deux graphes ont même graphe totalement réduit, leur treillis des écoulements sont isomorphes

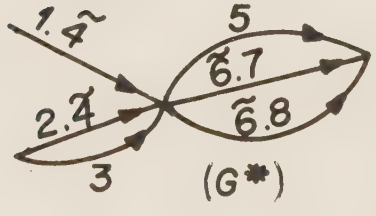
$\overset{\circ}{G}{}_1^* \simeq \overset{\circ}{G}{}_2^* \Rightarrow T(G_1) \simeq T(G_2)$

Démonstration : En effet la fusion du bord d'un graphe ne modifie pas le treillis des écoulements du graphe et la réduction non plus puisqu'il est possible de marquer les arcs de G^* à partir de ceux de G de telle sorte que l'ensemble des rivières de G^* soit isomorphe à l'ensemble des rivières de G et que tout écoulement de G^* soit l'image d'un écoulement de G et réciproquement de façon biunivoque.

⊣

Exemple :





Donc la réduction d'un graphe conserve ses écoulements.

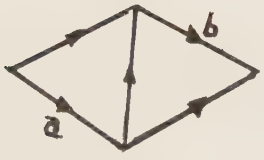
On a $T(G) \simeq T(G^*) \simeq T(\overset{\circ}{G}{}^*)$

Définition 1 : Graphes E-équivalent :

$G_1 \underset{E}{\sim} G_2$ si et seulement si $\overset{\circ}{G}{}^*_1 \simeq \overset{\circ}{G}{}^*_2$

C'est évidemment une relation d'équivalence.

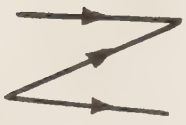
Exemple :



(G_1)

$(\overset{\circ}{G}{}^*_1)$

$\overset{\circ}{G}{}^*_1$ est obtenu par contraction de a et b dans G_1.



(G_2)

$(\overset{\circ}{G}{}^*_2)$

$G_1 \underset{E}{\sim} G_2$

$\overset{\circ}{G}{}^*_2$ est obtenu par fusion du bord de G_2

Corollaire 1 : Les graphes d'une même classe de E-équivalence ont même treillis des écoulements.

$$(G_1 \underset{E}{\sim} G_2) \Leftrightarrow (\overset{\circ}{G}{}^*_1 \simeq \overset{\circ}{G}{}^*_2) \Rightarrow (T(G_1) \simeq T(G_2))$$

Une classe de E-équivalence sera dite série-parallèle (notée S.P.) si et seulement si son représentant $\overset{\circ}{G}{}^*$ est un graphe série-parallèle.

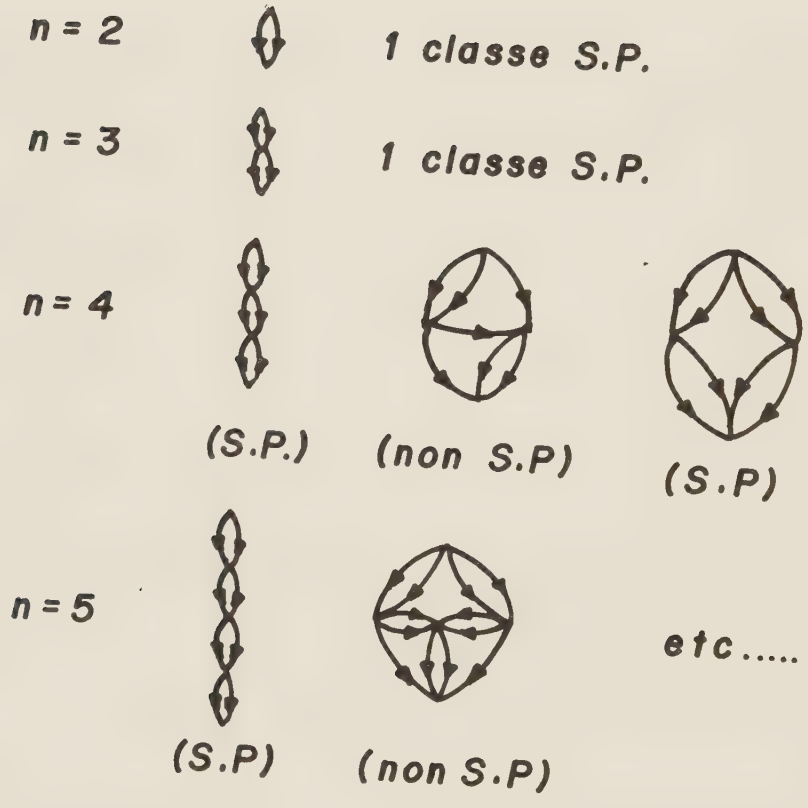
Exemple : Quelques classes de E-équivalence caractérisées par $\overset{\circ}{G}{}^*$ contenant le nombre minimum d'arcs.

Soit n le nombre de sommets de $\overset{\circ}{G}{}^*$:

$$\forall x \begin{cases} d^+(x) \geq 2 \\ \text{ou} \\ d^+(x) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d^-(x) \geq 2 \\ \text{ou} \\ d^-(x) = 0 \end{cases}$$


n = 2
1 classe S.P.
n = 3
1 classe S.P.
n = 4
(S.P.)
(non S.P)
(S.P)
n = 5
(S.P)
(non S.P)
etc.....

III-4 - Produit direct de deux treillis et mise en parallèle de deux graphes

Définition 1 : ab est une branche dans un treillis T si b couvre a.

Définition 2 : Les branches ab et cd sont équivalentes, si elles sont confondues ou s'il existe une suite finie de branches :

$ab = e_1f_1, e_2f_2, \ldots, e_mf_m = cd$ telles que quelque soit $i=1,\ldots,m-1$

- $e_i = e_{i+1} \cap f_i$ et $f_{i+1} = e_{i+1} \cup f_i$

ou bien

- $e_{i+1} = e_i \cap f_{i+1}$ et $f_i = e_i \cup f_{i+1}$.

Produit direct

Définition 1 : Le produit direct de deux treillis T_1 et T_2 noté $T_1 \times T_2$ est le treillis défini par :

$$T_1 \times T_2 = \{x_1x_2 \ / \ x_1 \in T_1 \text{ et } x_2 \in T_2\}$$

Propriété 1 : Le produit direct de plusieurs treillis est associatif et commutatif.

On note 2^p le treillis de Boole à 2^p éléments.

Nombre d'éléments d'un treillis produit direct de deux treillis :

Si $Card(T_1) = m$, $Card(T_2) = n$

alors $Card(T_1 \times T_2) = m \times n$.

Nombre d'atomes :

Si T_1 a p atomes, T_2 a q atomes

alors $T_1 \times T_2$ a p+q atomes.

Nombre de classes de branches

Si les treillis $T_1,\ldots,T_n$ ont une seule classe de branches, alors $T_1 \times\ldots\times T_n$ a n classes de branches.

G. Birkhoff définit un treillis simple comme un treillis T dont les seules congruence sont l'égalité et T^2.

M. Trehel a montré que si un treillis a une seule classe de branches, il est simple.

Treillis des écoulements de deux graphes mis en parallèle

Soit $G = G_1 \text{ "}\|\text{" } G_2$.

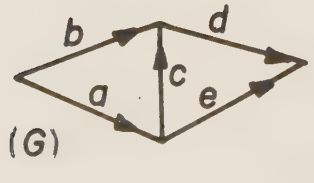
Les éléments de T(G) sont l'ensemble des éléments $E_1 \cup E_2$ où E_i est un élément quelconque de $T(G_i)$, car l'ensemble des rivières formé de l'ensemble des rivières de E_1 et de l'ensemble des rivières de E_2 est un écoulement de T(G) et réciproquement.

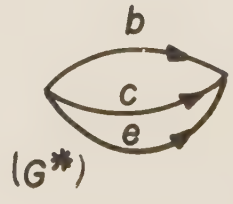
Théorème 1 : Le treillis des écoulements de deux graphes G_1 et G_2 mis en parallèle est isomorphe au produit direct des treillis de G_1 et de G_2.

$T(G_1 \text{ "}\|\text{" } G_2) \tilde{\simeq} T(G_1) \times T(G_2)$

Si $T(G_1)$ et $T(G_2)$ ont une classe de branches, $T(G_1 \text{ "}\|\text{" } G_2)$ à deux classes de branches.

Exemple :





(G_1)

$G^* \simeq G_1 \text{ "}\|\text{" } G_1 \text{ "}\|\text{" } G_1$

$T(G) \simeq T(G^*) \simeq 2^3$

T(G) à 3 classes de branches.

III-5 - Produit contracté de deux treillis et mise en série de graphe

Produit contracté

Définition 1 : Le produit contracté de deux treillis T_1 et T_2 noté $T_1 * T_2$ est le treillis défini par :

$$T_1 * T_2 = \{x_1x_2 \;/\; x_1 \in T_1 \text{ et } x_1 \neq \Phi \;,\; x_2 \in T_2 \text{ et } x_2 \neq \Phi\} \;.$$

Propriété 1 : Le produit contracté de plusieurs treillis est commutatif, associatif et a pour élément neutre 2^1 : $T * 2^1 \tilde{\sim} T$.

Nombre d'éléments d'un treillis produit contracté de deux treillis :

Si card $(T_1) = m$, card$(T_2) = n$

alors card $(T_1 * T_2) = (m-1)(n-1) - 1$

Nombre d'atomes :

Si T_1 a p atomes, T_2 a q atomes

$T_1 * T_2$ a $p \times q$ atomes.

Nombre de classes de branches

Si T_1 et T_2 sont non réduit à 2^1 et atomiques

$T_1 * T_2$ a une seule classe de branches, donc est simple.

Treillis des écoulements de deux graphes mis en série

Soit $G = G_1$ "~" G_2

Les écoulements de G sont formés d'un écoulement de $F(G_1)$ (non vide) concaténé a un écoulement de $F(G_2)$.

Or $T(G) \tilde{\sim} T(F(G))$ quel que soit le graphe G.

Les éléments de T(G) sont donc :

E_1E_2 où $E_i \in T(G_i)$ et E_i non vide.

Théorème 2 : Le treillis des écoulements de deux graphes mis en série est isomorphe au produit contracté des treillis de G_1 et de G_2

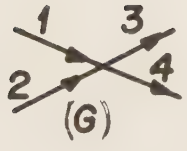
$$T(G_1 \text{ "}\sim\text{" } G_2) \tilde{\sim} T(G_1) * T(G_2).$$

Corollaire : Si G est pseudo-série, c'est-à-dire $G \tilde{\sim} G_1$ "$\sim$" G_2, si G_1 et G_2 contiennent chacun au moins deux rivières et si $T(G_1)$ et $T(G_2)$ sont atomiques, alors T(G) n'a qu'une classe de branches.

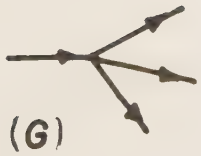
C'est en effet l'application d'un résultat sur le produit contracté montré par M. Trehel. Si G_1 contient au moins deux rivières on a en effet $T(G_1) \neq 2^1$.

—*—

Exemple :



T(G) a une classe de branche



T(G) a 3 classes de branche.

Treillis des écoulements des graphes pseudo-série-parallèle

Les treillis des écoulements d'un graphe G obtenu par récurrence à partir de graphes mis en série et en parallèle est isomorphe au treillis obtenu par récurrence par produit contracté et produit direct de ces graphes.

Exemple : $G \tilde{\simeq} ((G_1 \text{ "}\sim\text{" } G_2) \text{ "}\|\text{" } G_3 \text{ "}\|\text{" } G_4) \text{ "}\sim\text{" } (G_5 \text{ "}\|\text{" } G_6)$

alors

$$T(G) \tilde{\simeq} ((T(G_1) * T(G_2) \times T(G_3) \times T(G_4)) * (T(G_5) \times T(G_6))$$

III-6 - Treillis des écoulements des graphes série-parallèle et série-parallèle généralisées

Les propriétés des treillis des graphes série-parallèle généralisés sont identiques à celles des treillis des graphes série-parallèle.

On dit qu'un treillis est un treillis C.D. s'il est formé à partir de 2^1 par un nombre fini d'applications du produit direct et du produit contracté.

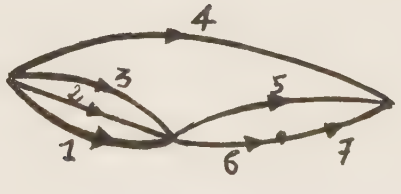
Théorème 4 : Les treillis des écoulements d'un graphe série-parallèle (généralisé) est un treillis C.D.

C'est immédiat par définition des graphes série-parallèle et application du corollaire des théorèmes 1 et 2.

—X—

Ces treillis ont déjà été rencontré dans la littérature .

Exemple :

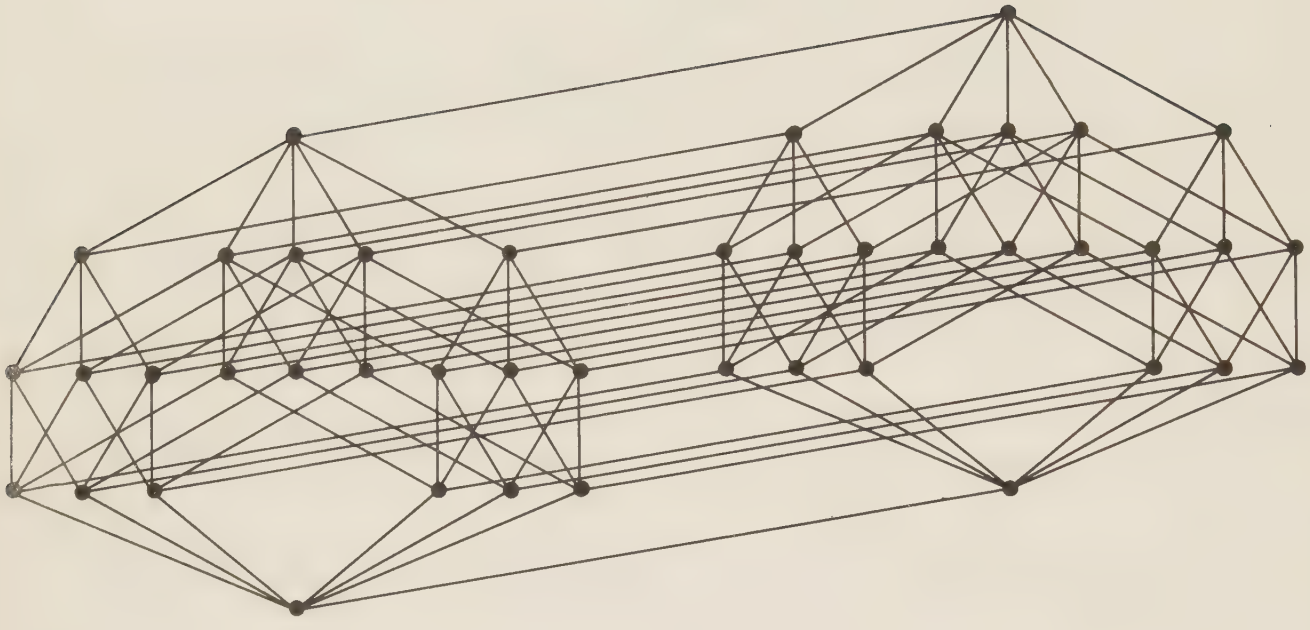


$G = [(1 \text{ "}\|\text{" } 2 \text{ "}\|\text{" } 3) \sim (5 \text{ "}\|\text{" } (6 \text{ "}\sim\text{" } 7))] \text{ "}\|\text{" } 4$

$T(G) \tilde{\iota} [(2^1 \times 2^1 \times 2) * (2^1 \times (2^1 * 2^1))] \times 2^1$

$\tilde{\iota} (2^3 * 2^2) \times 2^1$

T(G)



Corollaire 1 : Le treillis des écoulements d'une classe S.P. de E-équivalence est un treillis C.D. Réciproquement tout treillis C.D. est le treillis d'une classe S.P.

Démonstration : En effet un treillis C.D. caractérise de façon unique un graphe série-parallèle [10] . Ceci résulte de la factorisation unique des produits direct et contracté et de l'incompatibilité de ces deux factorisations.

—X—

Corollaire 2 : Un graphe série-parallèle donne par réduction totale un graphe série-parallèle.

En effet, si G est série-parallèle T(G) est un treillis C.D. il caractérise donc une classe S.P. de E-équivalence dont le représentant $G^{\circ *}$

En définitive : la suppression d'arc a permis de caractériser certains écoulements d'un graphe. La contraction d'arc a permis grâce à la réduction d'isoler une famille de graphes plus vaste que celle des graphes série parallèle, dont les treillis d'écoulements sont des treillis C.D. souvent rencontrés dans la littérature.

Les propriétés de T(G) non spécifiquement liées aux opérations ci-dessus font l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE - III

TREILLIS DES ECOULEMENTS

Ce chapitre est consacré aux propriétés algébriques du treillis des écoulements T(G) d'un graphe G.
On montre qu'il est fini

atomique
coatomique.

Les $\cap$ - et $\cup$ -irréductibles sont caractérisés de façon immédiate dans le graphe G.

T(G) est complémenté, relativement complémenté et l'on montre que :

les compléments d'un atome forment un $\cap$ -demi-treillis où les éléments maximaux sont des coatomes,

les compléments d'un coatome forment un $\cup$-demi-treillis où les éléments minimaux sont des atomes.

On introduit la notion nouvelle de degré de réduction d'un graphe. Elle permet de mettre en évidence une fonction de rang dans le treillis.

On donne des résultats sur la connexité entre deux lignes consécutives du diagramme de Hasse du treillis.

Les résultats de M. TREHEL sur le produit direct et le produit contracté de treillis sont appliqués aux treillis des écoulements des graphes pseudo-série parallèle et série-parallèle généralisés.

Les propriétés générales des treillis d'écoulements s'appliquent à la recherche des écoulements dans un graphe :

A cet effet on fournit un algorithme ascendant dans T(G) et une procédure descendante dans T(G).

III-1 - Treillis des écoulements T(G) : propriétés

L'élément maximal de T(G) est G lui-même.
L'élément minimal de T(G) est l'ensemble vide.

III-1 - T(G) est fini donc atomique et coatomique

Soient $|G|$ le nombre d'arcs de G et $|T(G)|$ le cardinal de T(G).

$$|T(G)| \leq 2^{|G|}$$

G est dit pseudo série s'il s'obtient par mise en série de graphes non vides. Pour un tel graphe on a en particulier :

$G \tilde{\simeq} G_1$ "$\hat{\sim}$" G_2 où G_1 et G_2 sont non vides.

Corollaire : Si G est tel que son graphe totalement réduit G^{o*} est pseudo-série, alors T(G) n'a qu'une classe de branches ; T(G) est donc simple.

Démonstration :

$G^{o*} \tilde{\simeq} G_1^{o*}$ "$\sim$" G^{o*}_2

G_1^{o*} et G_2^{o*} ne sont pas réduits à un arc donc $T(G_1^{o*})$ et $T(G_2^{o*})$ ne sont pas isomorphes à 2^1 et sont atomiques.

Le résultat est donc un corollaire du chapitre II.2

—X—

Remarquons que si $G^{\circ *}$ est pseudo-série il en est de même de G, mais la réciproque est fausse.

Exemple :

(G)

$G \tilde{\sim} G_1$ "$\sim$" G_2

où G_1 :

et G_2 :

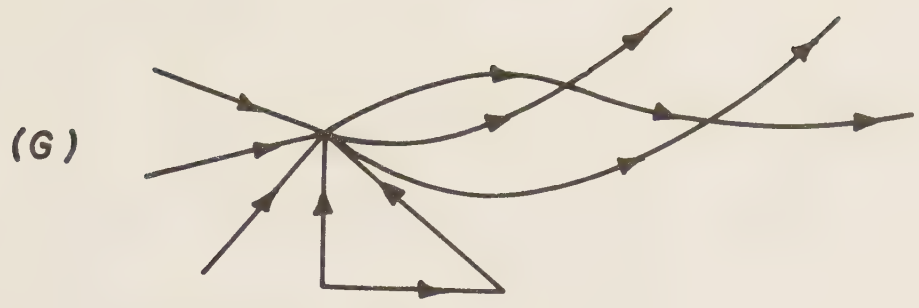
G est pseudo-série

$G^{\circ *} \tilde{\sim} G_1$; G_1 n'est pas pseudo-série.

Exemple de graphes dont le treillis des écoulements à une classe de branches :

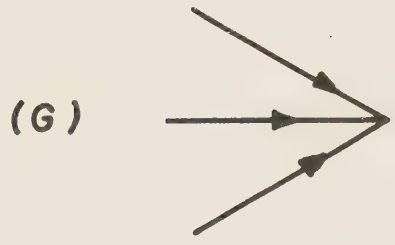
(G)

G est pseudo-série.

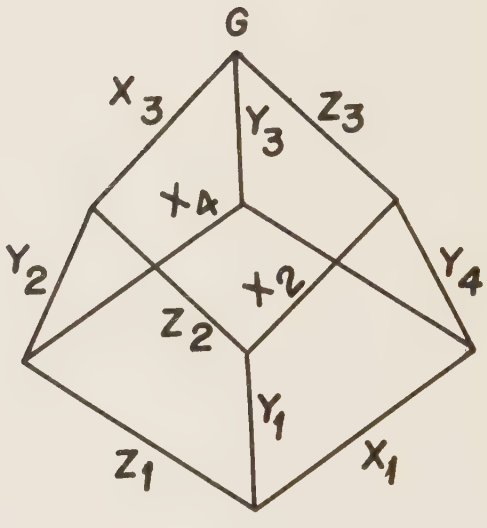


G est pseudo série

Contre exemple dans le cas où G n'est pas pseudo-série.



T(G)



$T(G) \simeq 2^3$

T(G) a donc 3 classes de branches

$x_1x_2x_3x_4y_1y_2y_3y_4z_1z_2z_3z_4$

III-1-2 - Complémentation

Rappel : Le complément de E dans T(G) est un élément $\hat{E}$ de T(G) tel que :

$$E \cup \hat{E} = G$$
$$E \cap \hat{E} = \Phi$$

Définition 1 : Une couverture minimale d'un ensemble d'arcs A de G est un des plus petits écoulements de G dont le support contienne A.
Nous le notons $E_c(A)$.

Propriété 1 : $A \neq \Phi \Rightarrow E_c(A) \neq \Phi$

Rappel : S(E) est le support de l'écoulement E de G.

Théorème 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un écoulement $\hat{E}$ soit un complément de E dans T(G) est que $\hat{E}$ soit une couverture minimale de U-S(E) dans T(G).

On utilise le lemme suivant pour démontrer le théorème 1.

Lemme : Toute rivière d'une couverture minimale de A passe par un élément de A.

Démonstration : sinon la minimalité serait réalisée pour les rivières vérifiant le lemme.

Démonstration théorème 1 :

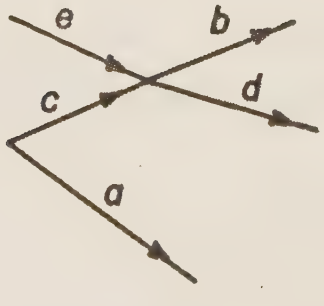
$\hat{E} = E_C(U-S(E))$

$S(\hat{E}) \cup S(E) = U = S(G)$ donc $E \cup \hat{E} = G$

Par le lemme $E \cap \hat{E} = 0$.

Corollaire 1: Le treillis des écoulements d'un graphe G est complémenté ; il n'y a pas en général unicité du complément.

Exemple :



E = {cb,ab}

U -S(E) = {e,d}

$\hat{E}_1$ = {ad,e}

$\hat{E}_2$ = {cd,e} sont des couvertures minimales de $\hat{E}$

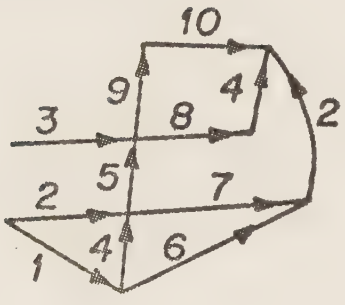
$\hat{E}_3$ = {ad,cd,e} est un complément de E qui n'est pas une couverture minimale de U-S(E).

Corollaire 2 : $\forall E \in T(G)$, le sous treillis $[E,G]$ est complémenté

En effet, soit E_1 un élément de $[E,G]$.
Notons $A = S(E)$, $B = U-S(E_1)$.
Alors $E_C(A \cup B)$ est un complément de E_1 dans $[E,G]$. On le désigne par E_2.
Par construction comme précédemment on a $E_1 \cup E_2 = G$, $E_1 \cap E_2 = E$.

—X—

Exemple :



$S(E) = \{1,3,4,5,8,9,10,11\} = A$

$S(E_1) = S(E) \cup \{2\}$; $B = \{1,6,7,12\}$

alors $S(E_2) = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$= U-\{2\}$

$E_1 \cup E_2 = G \quad E_1 \cap E_2 = E.$

Propriété 2 : $\forall E \in T(G)$, le sous -treillis $[\Phi,E]$ de $T(G)$ est le treillis des écoulements du support de E donc est complémenté.

Corollaire : Le treillis des écoulements d'un graphe G est relativement complémenté

En effet : $\forall E \in T(G)$, $[\Phi,E]$ et $[E,G]$ sont complémentés.

—X—

Remarquons que T(G) n'étant pas modulaire : complémenté n'implique pas relativement complètement.

Graphe des compléments [10]

On dit qu'un graphe non orienté K = (Y,V) est le graphe des compléments d'un treillis T si

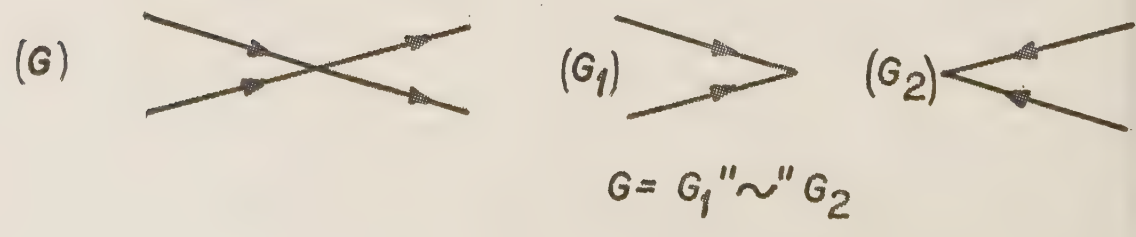
Y = T-{0,1} 0 est l'élément minimal de T
1 est l'élément maximal de T.

L'arc (a,b) appartient à V si et seulement si b est complément de a dans T.

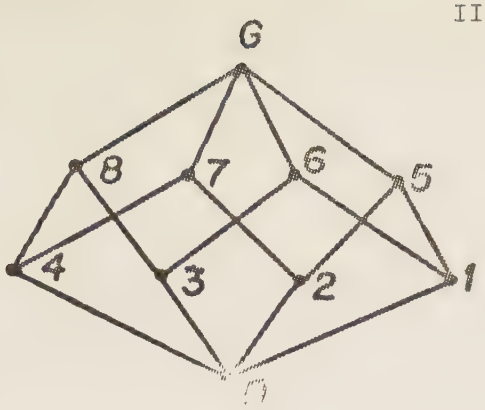
Théorème : Si G est tel que G^{o*} est pseudo-série alors le graphe des compléments de T(G) est connexe.
Toute arête de ce graphe appartient au moins à un cycle élémentaire de longueur 4,5,6,8.
Deux éléments quelconques peuvent être reliés par au moins une chaîne de longueur paire et une chaîne de longueur impaire.

Démonstration :
$T(G^{o*}) \simeq T(G)$
$G^{o*} \simeq G_1$ "$\sim$" G_2
$T(G^{o*}) \simeq T(G_1) * T(G_2)$ où $T(G_i)$ est non isomorphe à 2^1 .
$T(G_1)$ et $T(G_2)$ sont complémentés. Dans ces hypothèses le théorème est valable pour T(G) [24]

Exemple :

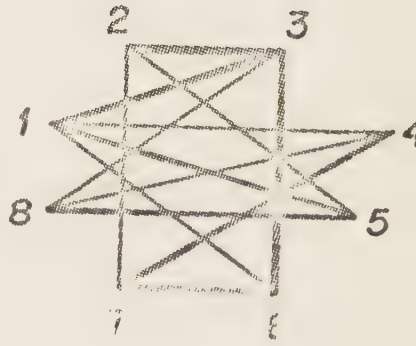


T(G)

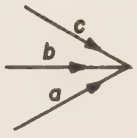


$K = (X, V)$

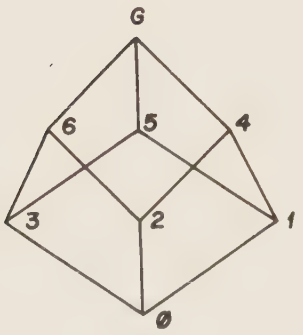
$X = \{1,2,3,4\}$
$\{5,6,7,8\}$



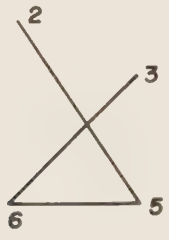
Contre exemple



G n'est pas pseudo-série



K = (X,V) n'est pas connexe



Correspondance des compléments [10]

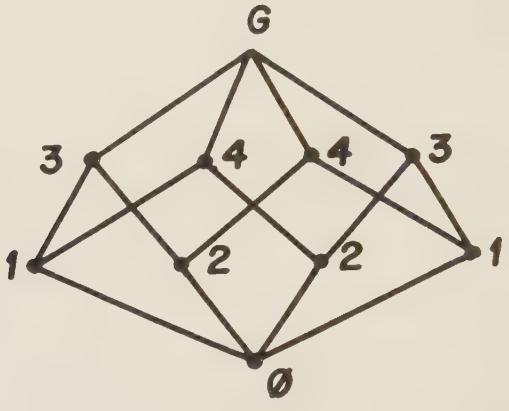
Un treillis T à nombre pair d'éléments et complémenté, a la propriété de correspondance des compléments si on peut partitionner T-{0,1} en deux parties égales A et B,telles qu'on puisse trouver une bijection entre A et B,associant à un élément un de ses compléments.

Propriété : Si G est série parallèle généralisée alors T(G) a la propriété de correspondance des compléments.

En effet T(G) est un treillis C.D.

M. TREHEL a montré la propriété pour les treillis C.D.

Exemple



III-1-3 - Eléments de T(G) irréductible pour l'union et l'intersection

Caractérisation des $\cup$-irréductibles et $\cap$-irréductibles de T(G)

Propriété : Les atomes de T(G) sont les rivières de G.
Les seuls $\cup$-irréductibles de T(G) autre que l'élément minimal sont les atomes.

Les éléments couvrant l'élément minimal de T(G) sont les rivières de G. La seconde partie de l'énoncé découle du fait que T(G) est complémenté.

—X—

La réduction de G conserve T(G).
Supposons donc G réduit.

Propriété : Les coatomes de T(G) sont les écoulements obtenus par suppression d'un arc et d'un seul de G.
Les seuls $\cap$-irréductibles de T(G) autre que l'élément maximal sont les coatomes.

Tout arc a de G est suppressible car G est réduit.
G_a est un coatome de T(G) car c'est un écoulement de support maximal strictement contenu dans G. La réciproque est immédiate.
La seconde assertion de la propriété découle encore de la complémentation de T(G).

Si G n'est pas réduit on remplace dans l'énoncé G par G^* en tenant compte du fait que
$T(G) \tilde{\simeq} T(G^*)$.

Compléments des irréductibles de T(G)

Propriété : Dans T(G) les compléments des $\cup$-irréductibles forment un $\cap$-demi treillis où les éléments maximaux sont des $\cap$-irréductibles.

Démonstration :
Supposons G réduit.
G = (X,U).
Soit r une rivière de G ; $r = a_1,\ldots,a_p$.
Par la propriété 3, chapitre II paragraphe I.3 :
$\hat{R} = G_{\bar{a}_{i_1},\ldots,\bar{a}_{i_k}}$, où $\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$ est un sous-ensemble non vide quelconque de l'ensemble des arcs de r (éventuellement k = p), est un écoulement de G.

$\hat{R} \cap r = \Phi$ car r ne peut appartenir à $\hat{R}$ (en effet $k \geq 1$).

$S(\hat{R} \cup r) = S(\hat{R}) \cup S(r) = U$
d'où $\hat{R} \cup r = G$.

Réciproquement, soit $\hat{R}$ un complément de r dans T(G).

$\hat{R} \cap r = \Phi$ entraîne qu'il existe au moins un arc de r qui n'appartient pas au $S(\hat{R})$.

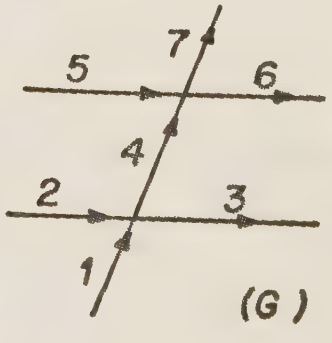
$\hat{R} \cup r = G$ entraîne que tout arc qui n'appartient pas à r appartient au $S(\hat{R})$.

Les compléments de r dans T(G) sont tous les $\hat{R}$ ci-dessus définis.
Il y en a 2^p-1.

$\hat{R}_1 \cap \hat{R}_2 = \hat{R}_3$
En effet, $\hat{R}_1 = G_{\overline{A}_1}$ où A_1 est contenu dans l'ensemble des arcs de r et n'est pas vide.
De même $\hat{R}_2 = G_{\overline{A}_2}$.
$\hat{\hat{R}}_1 \cap \hat{R}_2 = G_{\overline{A_1 \cup A_2}}$ (en faisant référence au théorème ci-dessus rappelé).

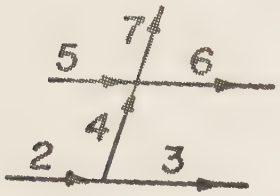
Le plus petit complément de r dans T(G) est $G_{\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_p}$.
Les compléments maximaux sont $G_{\overline{a}_i}$, i= 1,...,p qui sont des coatomes de T(G).

Exemple :

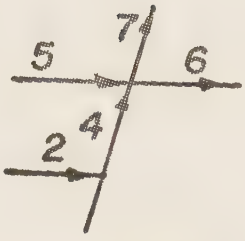


Considérons l'atome 13

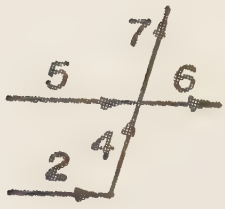
Ses compléments sont :



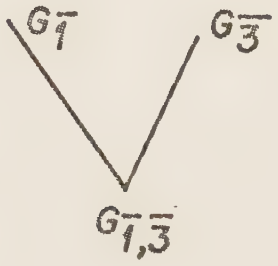
$G_{\bar{1}}$



$G_{\bar{3}}$



$G_{\bar{1},\bar{3}}$



De même en considérant l'atome : 246, ses compléments sont $G_{\bar{2}}$, $G_{\bar{4}}$, $G_{\bar{6}}$, $G_{\bar{2},\bar{4}}$, $G_{\bar{2},\bar{6}}$, $G_{\bar{4},\bar{6}}$, $G_{\bar{2},\bar{4},\bar{6}}$.

Propriété : Dans T(G) les compléments d'un $\cap$-irréductible forme un $\cup$-demi-treillis où les éléments minimaux sont des $\cup$-irréductibles.

Démonstration :

On peut sans restriction supposer aussi G-réduit. Un $\cap$-irréductible est de la forme $G_{\bar{a}}$ où a est un arc quelconque de G.

Tout complément de $G_{\bar{a}}$ dans T(G) est formé de rivières passant par a.

Réciproquement tout écoulement formé d'un ensemble de rivières passant par a est un complément de $G_{\bar{a}}$.

Le plus grand des compléments est celui formé de toutes les rivières de G passant par a.

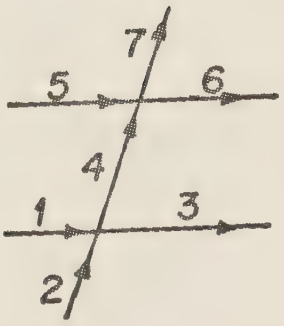
Si E_a est un complément de $G_{\bar{a}}$, E'_a un autre complément de $G_{\bar{a}}$.

Alors $E_a \cup E'_a$ est un écoulement formé exclusivement de rivières passant par a. C'est donc aussi un complément de $G_{\bar{a}}$.

Les compléments minimaux sont des atomes ($\cup$-irréductibles de T(G) : ils sont formés d'une rivière r_a passant par a.

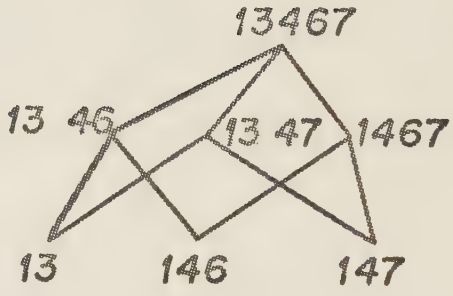
c.q.f.d.

Exemple :

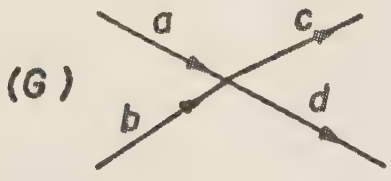


$G_{\overline{7}}$ est un coatome.

Les compléments de G_1 forment un $\cup$ demi-treillis.



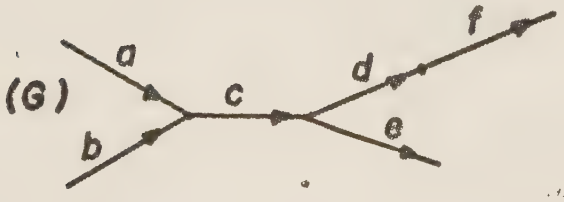
Exemple 1



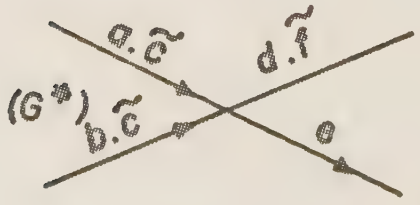
G est réduit : $G \tilde{\simeq} G^*$

Les $\cap$-irréductibles de T(G) sont : G, $G_{\overline{a}}$, $G_{\overline{b}}$, $G_{\overline{c}}$, $G_{\overline{d}}$.

Exemple 2



G n'est pas réduit



Les $\cap$-irréductibles de $T(G^*)$ sont :

G^*, G'_1, G'_2, G'_3, G'_4

où G'_1 = {b $\tilde{c}$ d$\tilde{f}$, b$\tilde{c}$e} obtenu en supprimant a.$\tilde{c}$ de G^*

G'_2 = {b$\tilde{c}$d$\tilde{f}$, a$\tilde{c}$d$\tilde{f}$} " " c

G'_3 = {a$\tilde{c}$d$\tilde{f}$, a$\tilde{c}$e} " " b.$\tilde{c}$

G'_4 = {a$\tilde{c}$e, b$\tilde{c}$e} " " d.$\tilde{f}$

Ils sont isomorphes aux $\cap$-irréductibles de T(G) :

G, G_1, G_2, G_3, G_4

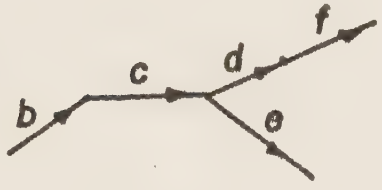
avec : G_1 = {bcdf, bce}

G_2 = {bcdf, acdf}

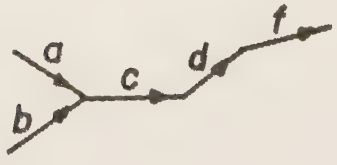
G_3 = {acdf, ace}

G_4 = {ace, bce}

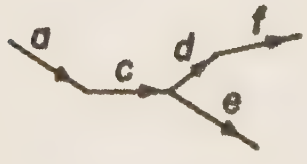
(G_1)



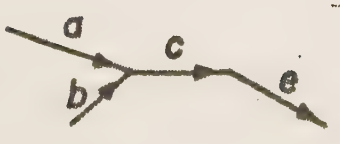
(G_2)



(G_3)

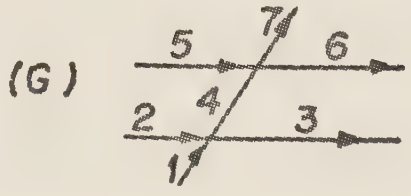


(G_4)



Les propriétés ne sont pas valables en général pour d'autres éléments.

Exemple :



$E = 2347$

$\hat{E}_1 = 134567$ est un complément maximal de E

$\hat{E}_2 = 12456$

$\hat{e}_1 = 1456$ est un complément minimal de E

$\hat{e}_2 = 1356$

Corollaire : le nombre d' $\cap$-irréductibles de T(G) est égal à $|G^*|$.

Théorème : Tout écoulement E de G s'obtient par suppression d'un arc et d'un seul de son successeur réduit dans une chaîne maximale de T(G).

Démonstration :

Soit E_1 un successeur de E dans une chaîne maximale de T(G). Le sous-treillis de T(G) : $[\Phi, E_1]$ est un treillis d'écoulements.

Réduisons le graphe engendré par le support de E_1. On obtient l'écoulement E^*, dit réduit.

$[\Phi, E_1] \simeq [\Phi, E_1^*]$

On applique la propriété à $[\Phi, E_1^*]$.

—x—

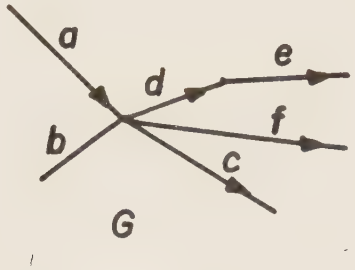
On rappelle que S(E) désigne le support de l'écoulement E.

Un arc composé $\tilde{a}_1\ \tilde{a}_2\ ,\ldots,\tilde{a}_{i-1},\ a_i\ \tilde{a}_{i+1},\ldots,a_p$ de G^* a pour dans G l'ensemble d'arcs $\{a_1,\ldots,a_p\}$. Aucun a_i, $i = 1,\ldots,p$ n'est suppressible dans G sauf a_i.

Le théorème précédent peut aussi se formuler de la façon suivante :

Soit E un écoulement de G et E_1 le successeur de E dans une chaîne maximale de T(G). Alors E s'obtient en supprimant de $S(E_1)$ un ensemble d'arcs preimages d'un arc de $S(E_1^*)$, sauf les composantes qui figurent dans d'autres arcs de E_1^*.

Exemple :



E = {ac,bc}

On a par exemple E_1 = {ac, bc, ade, bde}.

E s'obtient en supprimant de E les rivières qui passent par les arcs d et e car {d,e} est preimage dans E_1 de l'arc d.ẽ de E_1^*, et ni e ni d appartiennent à d'autres arcs de E_1^*.

$S(E) = S(E_1)-\{d,e\}$

III-1-4 - Chaînes maximales de T(G)

Rappel : Tout écoulement E de T(G) a pour support le "sous-graphe partiel" de G obtenu à partir de son successeur réduit E_1^* dans une chaîne maximale de T(G) par suppression d'un arc et d'un seul et réciproquement.

Corollaire : La longueur de toute chaîne maximale de T(G) est inférieure ou égale au cardinal de l'ensemble de $\cap$-irréductibles de T(G).

Démonstration :

Soit $l_G(c)$ la longueur d'une chaîne maximale de T(G)

$$l_G(c) \leq |G^*|$$

Soit I(G) le cardinal des $\cap$-irréductible de T(G)

$$I(G) = |G^*|$$

—X—

a) Caractérisation dans G des chaînes maximales de T(G)

Soit $c = G, X_1, \ldots, X_p$ une chaîne maximale de T(G).

X_1 est obtenu à partir de G^* par suppression d'un arc (suppressible)

X_i est obtenu à partir de X_{i-1} par suppression d'un arc (suppressible) de X_{i-1}^* .

$X_{i-1} \succ X_i$

L'algorithme se termine lorsque $X_p = X_{p+1}$ (ou $X_p^* = \Phi$).

b) Degré de réduction de G

Soit α le nombre d'arcs non suppressibles le long d'une chaîne maximale de T(G). Nous allons montrer que α ne dépend pas de la chaîne choisie, et ce nombre sera dit degré de réduction de G.

Théorème : Le degré de réduction α de G est égal au nombre de sommets ni source, ni puits de G.

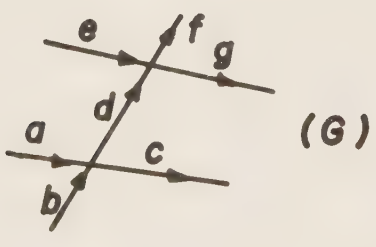
Démonstration :
Par suppression successive des arcs suppressibles de G (en vue d'extraire une chaîne maximale de T(G)) tout sommet x, ni source, ni puits de degré supérieur strictement à 1 deviendra à une certaine étape de degré égal à 1, c'est-à-dire :

$$d^+(x) = 1 \quad \text{ou} \quad d^-(x) = 1$$

Si $d^+(x) = 1$ (x,y) est non suppressible
si $d^-(x) = 1$ (t,x) est non suppressible.

—X—

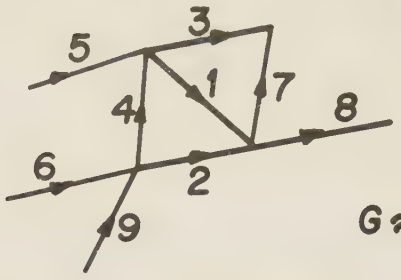
Exemple :



$C = G, G_{\bar{e}}, G_{\bar{e},\bar{f}}, G_{\bar{e},\bar{f},\bar{c}}, G_{\bar{e},\bar{f},\bar{c},\bar{a}}$
est une chaîne maximale de T(G).
d est non suppressible dans $G_{\bar{e}}$.
d et g sont non suppressibles dans $G_{\bar{e},\bar{f}}$ dans $G_{\bar{e},\bar{f},\bar{c}}$ et dans $G_{\bar{e},\bar{f},\bar{c},\bar{a}}$
$\alpha = 2$.

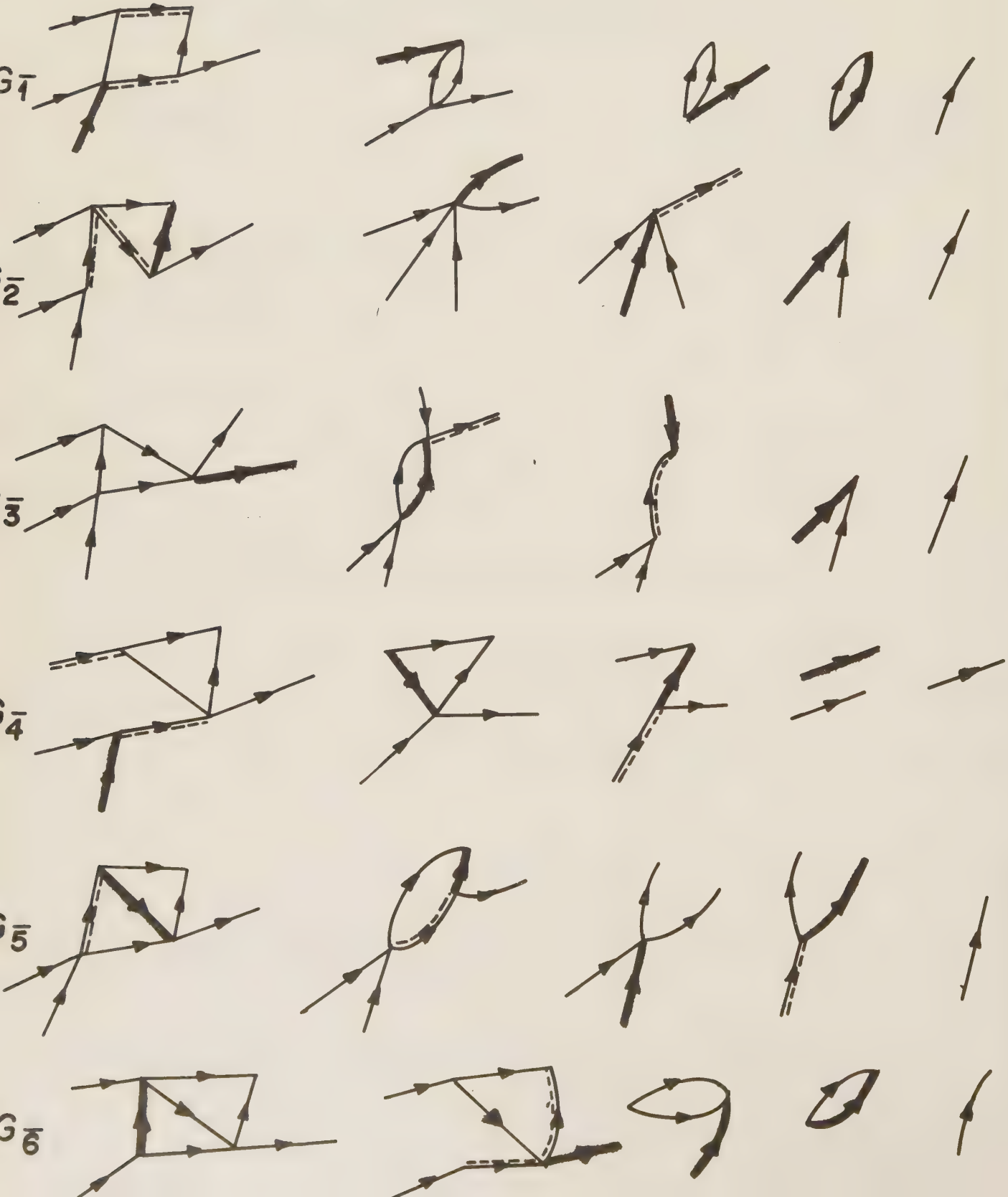
Corollaire 1 : Les chaînes maximales de T(G) ont même longueur et $l_G(c) = |G| - \alpha$

Exemple : Chaines maximales de $T(G)$



$G \approx G^*$

=====: arc non suppressible ; ▬ : arc que l'on supprime

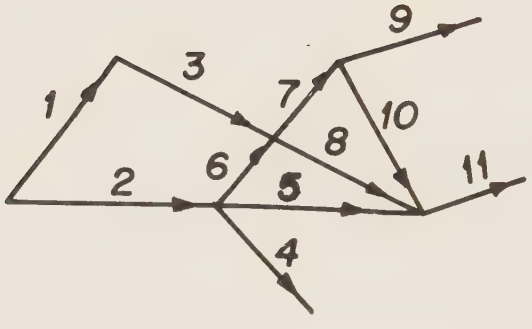


Corollaire 2 : Le treillis des écoulements de G vérifie la condition de Jordan Dedekind et admet la fonction de rang r(G).

$$r(G) = |G| - \alpha$$

(on compte les noeuds du treillis et le noeud ϕ est au rang 0).

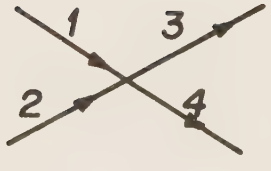
Exemple 1



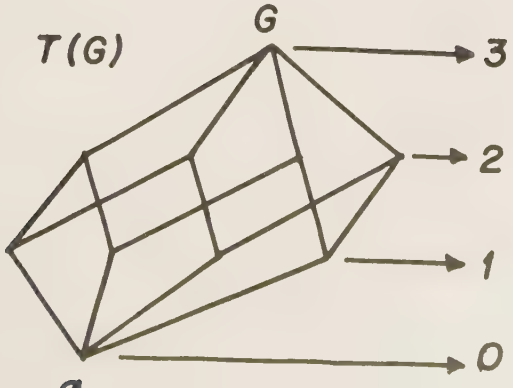
$|G| = 11$

$\alpha = 5$ $\qquad r(G) = 11-5 = 6$

Exemple 2



rang$\mathcal{T}(G) = |G| - \alpha = 4-1 = 3$



III-1-5 - Connexité de 2 lignes consécutives de T(G)

Propriété 1 : Pour tout couple d'atomes r et r' de T(G), il existe une suite d'atomes $r_1,\ldots,r_n$ et une suite d'écoulements $e_1,\ldots,e_{n-1}$ telles que :

$r_1 = r$ $\quad$ $r_n = r'$

e_1 couvre r_1 et r_2

e_2 couvre r_2 et r_3

⋮

e_{n-1} couvre r_{n-1} et r_n

Démonstration :

Les atomes de T(G) sont les rivières de G. Soient r et r' deux rivières de G.

- si r et r' forment un écoulement e_1 c'est fini : $e_1 = r \quad r' = \{r,r'\}$
  e_1 couvre r et r'.

- si r et r' ne forment pas un écoulement on a vu que dans ce cas les arcs non communs de r et r' forment sur chacune des 2 rivières n intervalles avec $n > 1$.
  Alors il existe n rivières de G : $r_1,\ldots,r_n$ telles que :
  $r_1 = r \quad r_n = r'$.
  et quel que soit $k = 1,\ldots,n-1$ les arcs non communs à r_k et r_{k+1} forment sur r_k et r_{k+1} un seul intervalle.

Il suffit en effet de définir r_k comme suit :

Soient $I_1,\ldots,I_n$ et $I'_1,\ldots,I'_n$ les intervalles formés par les arcs non communs à r et r' respectivement sur chacune d'elles.

r_k est formée de l'ensemble des arcs communs à r et r' et de I'_1, I'_2,..I'_{k-1}, $I_k,\ldots,I_n$.

Les arcs non communs à r_k et r_{k+1} forment sur r_k l'intervalle I_k et sur r_{k+1} l'intervalle I'_k.

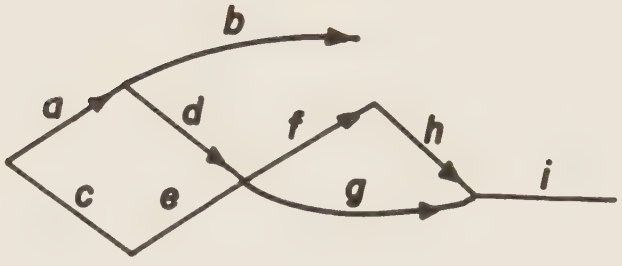
Ces deux rivières forment donc un écoulement e_k.

$$e_k = r_k \cup r_{k+1} = \{r_k, r_{k+1}\}$$

e_k couvre r_k et r_{k+1} quel que soit $k = 1,\ldots,n-1$.

c.q.f.d.

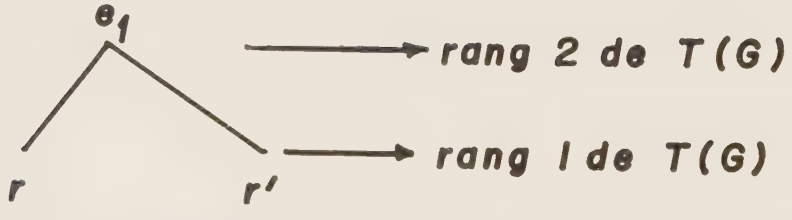
Exemple :



1°) Soient r = ab

r' = adgi

$r \cup r' = \{r, r'\} = e_1$



2°) Soient r = adgi

r' = cefhi

Les arcs non communs à r et r' forment 2 intervalles sur chacune d'elles.

$r_1 = r = adgi$

$r_2 = cegi$

$r_3 = cefhi$

$e_1 = r_1 \cup r_2 = \{adgi, cegi\}$

$e_2 = r_2 \cup r_3 = \{cegi, cefhi\}$

Propriété 2 : Pour tout couple de coatomes E_i et E_j de T(G) il existe

- soit un coatome E et deux écoulements e_1 et e_2 tels que
  e_1 est couvert par E_i et E
  e_2 est couvert par E et E_j

- soit 2 coatomes E_1 et E_2 et 3 écoulements e_1, e_2 et e_3 tels que :
  e_1 est couvert par E_i et E_1
  e_2 est couvert par E_1 et E_2
  e_3 est couvert par E_3 et E_j.

Démonstration :

La réduction de G conservant T(G), supposons G réduit.

Or a $E_i = G_{a_i}^-$ et $E_j = G_{a_j}^-$, $a_i \in U$, $a_j \in U$.

Alors d'après la propriété 4 du chapitre II, paragraphe II.1.3.il existe

- soit un arc a tel que a $a_i \mathcal{C}$ et a $a_j \mathcal{C}$
- soit deux arcs consécutifs a et b sans arc joignant l'origine de a et l'extrêmité de b tels que a $a_i \mathcal{C}$, b $a_j \mathcal{C}$ et ab $\mathcal{C}$.

Dans le premier cas, on définit :

$e_1 = G_{a_i,a}^-$; (e_1 couvre $G_{a_i}^-$ et G_a^-)

$e_2 = G_{a_j,a}^-$; (e_2 couvre $G_{a_j}^-$ et G_a^-)

et $E = G_a^-$.

Dans le second cas, on définit :

$e_1 = G_{a_i,a}^-$; (e_1 couvre $G_{a_i}^-$ et G_a^-)

$e_2 = G_{a,b}^-$; (e_2 couvre G_a^- et G_b^-)

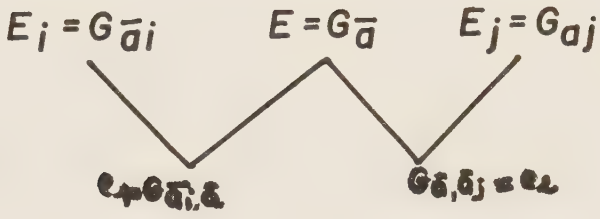
$e_3 = G_{b,a_j}^-$; (e_3 couvre G_b^- et $G_{a_j}^-$)

$E_1 = G_{\bar{a}}$

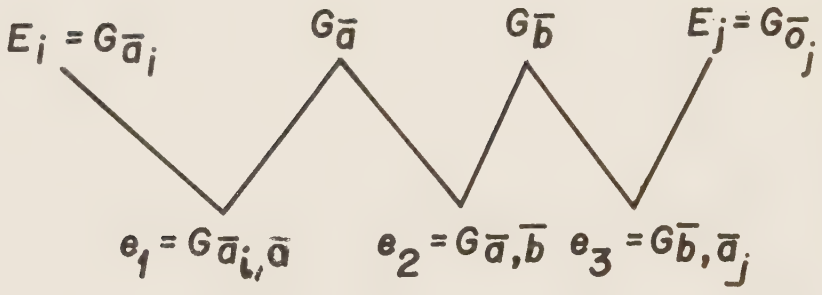
$E_2 = G_{\bar{b}}$

Dans T(G) on obtient les configurations suivantes :

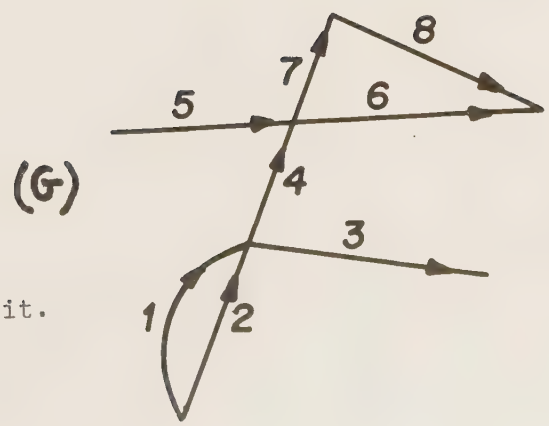
ou bien :



ou bien



Exemple :

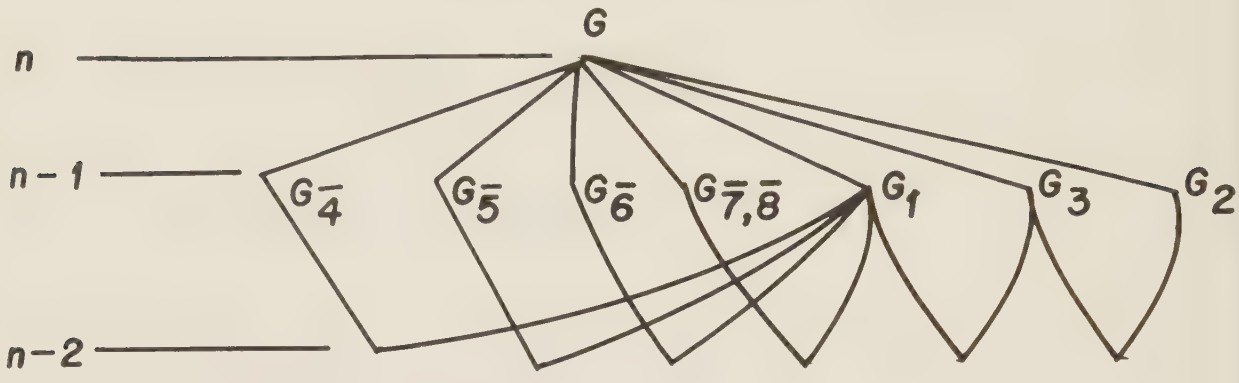


G n'est pas réduit.

Les coatomes de T(G) sont : $G_{\bar{1}}$, $G_{\bar{2}}$, $G_{\bar{3}}$, $G_{\bar{4}}$, $G_{\bar{5}}$, $G_{\bar{6}}$, $G_{\bar{7},\bar{8}}$.

Les arcs de G^* sont : 1,2,3,4,5,6,7.8
et les arcs consécutifs 1 et 3 sont tels que :

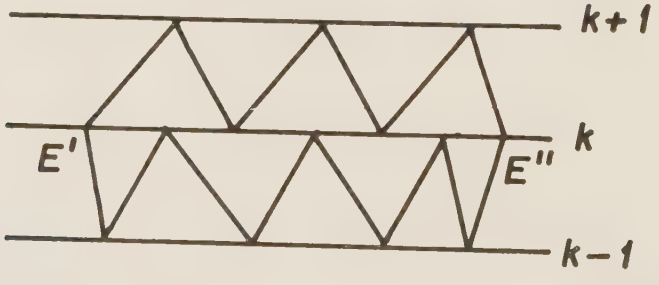
$1.3\,\mathcal{C}$, $1.4\,\mathcal{C}$, $1.5\,\mathcal{C}$, $1.6\,\mathcal{C}$, $1.78\,\mathcal{C}$ et $3.2\,\mathcal{C}$.



Quel que soient les coatomes E_1 et E_2 de T(G) au rang n, on peut aller de E_1 à E_2 en n'utilisant que les rangs n-1 et n-2.

Théorème (généralisation)

Soient E' et E" deux écoulements de même rang k dans T(G), alors on peut aller de E' à E" en n'utilisant que les rangs k et k+1 (respectivement k et k-1).



Démonstration :

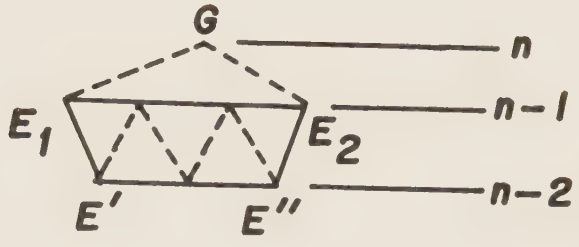
a) Rangs k et k+1

En effet, soit n le rang d'un treillis d'écoulements : la propriété est vraie pour k = n-2. car T(G) est gradué donc il existe des coatomes E_1 et E_2 tels que :

$E_1 \supset E'$

$E_2 \supset E''$

On peut aller de E_1 à E_2 en n'utilisant que les rangs n-2 et n-1 d'après la propriété 2.

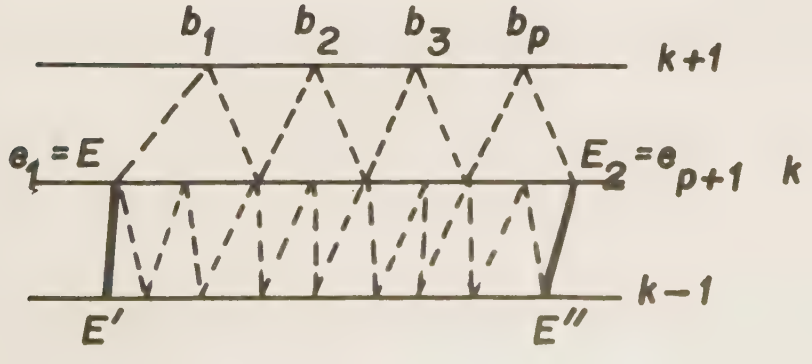


Il en est de même pour E' et E".

Supposons la propriété vraie pour k et faisons une récurrence sur k en descendant dans T(G).
Soient E' et E" au rang k-1 couvert par E_1 et E_2 au rang k.
On peut aller de E_1 à E_2 en n'utilisant que les rangs k et k+1 avec les éléments $b_1,\ldots,b_p$ du rang k+1 et les éléments $e_1 = E_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1} = E_2$ du rang k.
Mais dans chaque sous treillis (Φ, b_i), $i = 1,\ldots,p$ de rang k+1 on peut aller de e_i à e_{i+1} par les rangs (k+1)-2 et (k+1)-1 soient k-1 et k.

On peut donc aller de E' à E" en n'utilisant que les rangs k-1 et (k-1)+1=

c.q.f.d.



b) Rangs k et k-1

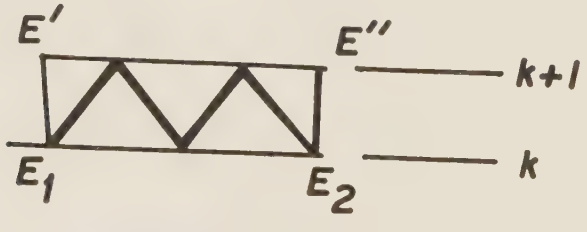
La propriété est vraie pour k = 2 : soient E' et E" au rang 2 couvrant les atomes a' et a". Par la propriété 1, on peut aller de a' à a" en n'utilisant que les rangs 1 et 2, donc de E' à E".

Supposons la propriété vraie pour k et faisons une récurrence ascendante dans T(G).

Soient E' et E" au rang k+1 couvrant E_1 et E_2 au rang k.

D'après la propriété démontrée pour les rangs k et k+1 on peut aller de E_1 à E_2 en n'utilisant que les rangs k et k+1, donc de E' à E" en n'utilisant que les rangs k+1 et (k+1)-1.

c.q.f.d.



Corollaire : Deux lignes consécutives de T(G) sont connexes.

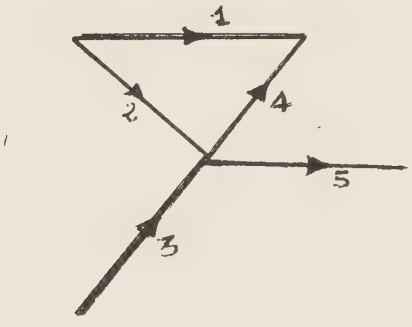
Démonstration :

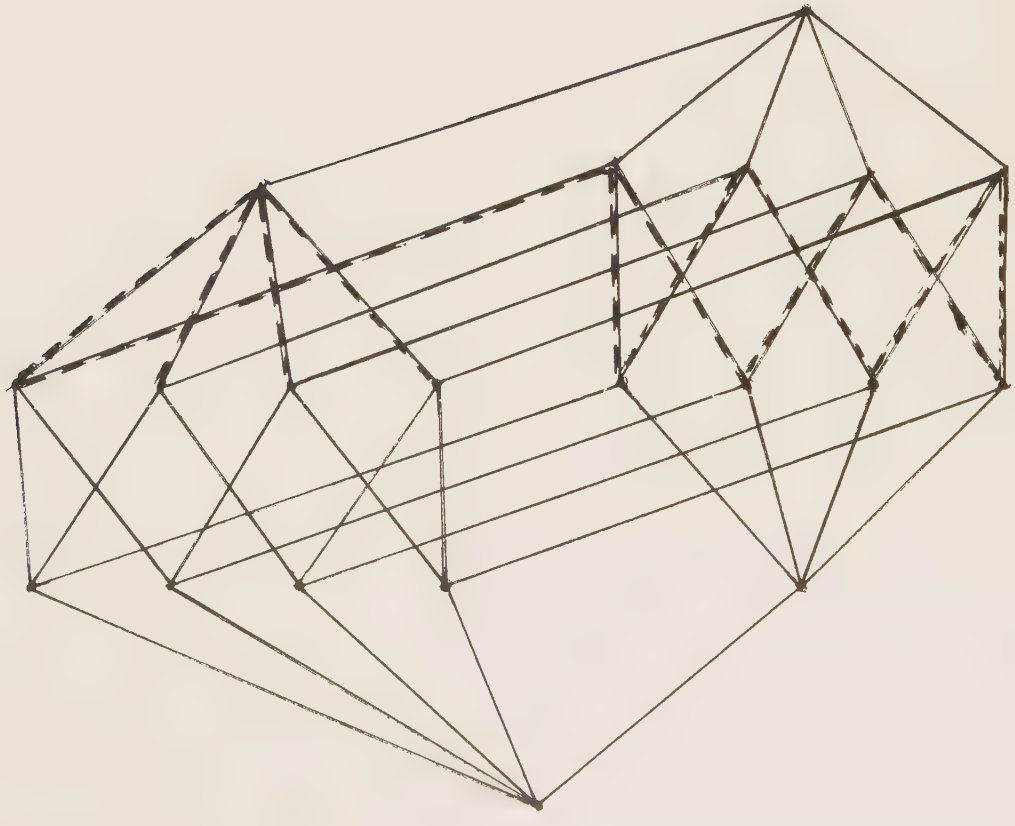
Considérons deux lignes de rangs k et k+1.

Tous les éléments de rang k+1 sont connectés entre eux à l'aide d'éléments de rangs k.

Tous les éléments de rangs k sont connectés entre eux à l'aide d'éléments de rangs k+1.

Exemple :





III-2 - Application : recherche des écoulements d'un graphe G

Suivant les problèmes à traiter il est souhaitable de savoir énumérer les écoulements à partir du plus grand et d'obtenir des écoulements de plus en plus petits (procédure descendante dans T(G)) ou bien au contraire partant des rivières d'obtenir des écoulements de plus en plus grand (algorithme ascendant dans T(G)).

Sur G considérons une relation d'ordre induite par la relation de descendance dans G :

y est un descendant de $x \overset{(1)}{\Rightarrow}$ ordre de y > ordre de x ; les arcs sont numérotés à partir de "1" conformément à (1) pour la procédure descendante. Les sommets le sont pour l'algorithme ascendant.

III-2-1 - Algorithme ascendant dans T(G) G = (X,U)

Soit E un écoulement de T(G) et r une rivière non contenue dans E alors E ∪ r est un écoulement de T(G) différent de E. Réciproquement si E_1 est un écoulement de T(G) qui ne soit pas une rivière, alors quel que soit une rivière r de E_1 il existe un écoulement E tel que $E_1 = E \cup r$.

Donc tout écoulement de T(G) peut s'obtenir par union d'une rivière et d'un autre écoulement (éventuellement vide).

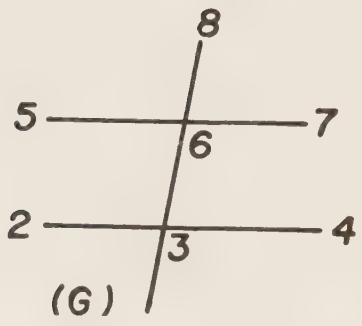
En particulier si E est au rang p, il existe E_1 au rang p-1 tel que $E = E_1 \cup r$ où r est une rivière car T(G) est atomique et de Jordan. De dekind.

On obtient facilement les écoulements de E par union d'une rivière et d'un écoulement.

Les écoulements de rang 1 de T(G) sont les rivières de G
Les écoulements de rang 2 de T(G) sont les éléments minimaux obtenu à partir de ceux de rang 1 par union d'une rivière (ceci pour toute rivière de G).

Les écoulements de rang p de T(G) sont les éléments minimaux obtenu à partir de ceux de rang p-1 par union d'une rivière (ceci pour toute rivière de G).

Application :



Les rivières de T(G) sont : 134
1367
1368
234
2367
2368
567
568

Au rang 2 de T(G)	1.2.3.4	
	1.2.3.6.8	
	1.2.3.6.7	
	1.3.6.7.8	
	2.3.6.7.8	
	5.6.7.8	
	1.3.4.6.8	
	1.3.4.6.7	
	2.3.4.6.8	
	2.3.4.6.7	
	1.3.5.6.8	
	1.3.5.6.7	
	2.3.5.6.8	
	2.3.5.6.7	
	1.3.4.5.6.8	Union de 2 écoulements disjoints
	1.3.4.5.6.7	
	2.3.4.5.6.8	
	2.3.4.5.6.7	
Au rang 3 de T(G)	1.2.3.4.6.8	
	1.2.3.4.6.7	
	1.2.3.6.7.8	
	1.2.3.5.6.8	
	1.2.3.5.6.7	
	1.3.5.6.7.8	
	2.3.5.6.7.8	
	1.3.4.6.7.8	
	2.3.4.6.7.8	
	1.3.4.5.6.7.8	Union de 2 écoulements disjoints
	2.3.4.5.6.7.8	
	1.3.4.5.6.7	
	2.3.4.5.6.7	
	1.2.3.4.5.6.8	
	1.2.3.4.5.6.7	
	2.3.4.5.6.8	
	1.3.4.5.6.8	
Au rang 4 de T(G)	1.2.3.4.5.6.7.8	
	1.2.3.4.6.7.8	
	1.2.3.5.6.7.8	
	1.2.3.4.6.7.8	
	1.2.3.4.5.7.8	
	1.2.3.4.5.6.7.8	
	1.2.3.4.5.6.7.8	
Au rang T de T(G)	G = 12345678	

III-2-2 - Procédure récursive descendante dans T(G), énumérant les écoulements de G : $E_c(S,\bar{S},O)$

Elle permet d'énumérer les écoulements de G sans répétition. Elle utilise le résultat du théorème du paragraphe 1.3

Tout écoulement d'un graphe G s'obtient en supprimant d'un de ses prédécésseurs E dans T(G).

- un arc suppressible

ou bien

- un ensemble d'arcs non suppressibles, premimage d'un arc composé de E^*.

Soit un écoulement obtenu à une certaine étape de la procédure :
E = $(S,\bar{S},O)$ c'est-à-dire E est obtenu en supprimant de G l'ensemble des arcs de O ; S (resp. $\bar{S}$) est l'ensemble des arcs suppressibles (resp. non suppressibles) de E.

- Chaque arc de S peut être tout à tour enlevé fournissant un nouvel écoulement E' :

$$E' = (S', \bar{S}', O \cup a)$$

où

$$a \in S$$

$\bar{S}' \supset \bar{S}$ (par suppression d'arc un arc non suppressible, reste non suppressible).

- Tout sous ensemble A d'arc de $\bar{S}$ preimage d'un arc composé de E^* peut être enlevé fournissant un nouvel écoulement E" :

$$E'' = (S'', \bar{S}'', O \cup A)$$

$$\bar{S}'' \supset \bar{S}-A$$

Tout écoulement s'obtient d'une façon ou de l'autre.

La relation d'ordre choisie sur les arcs de G permet de ne pas énumérer deux fois le même écoulement.

A cet effet, on note : a le plus grand élément de O et a+1 le successeur (pour l'ordre choisi) de a dans G.
S, $\bar{S}$, O sont totalement ordonnés.

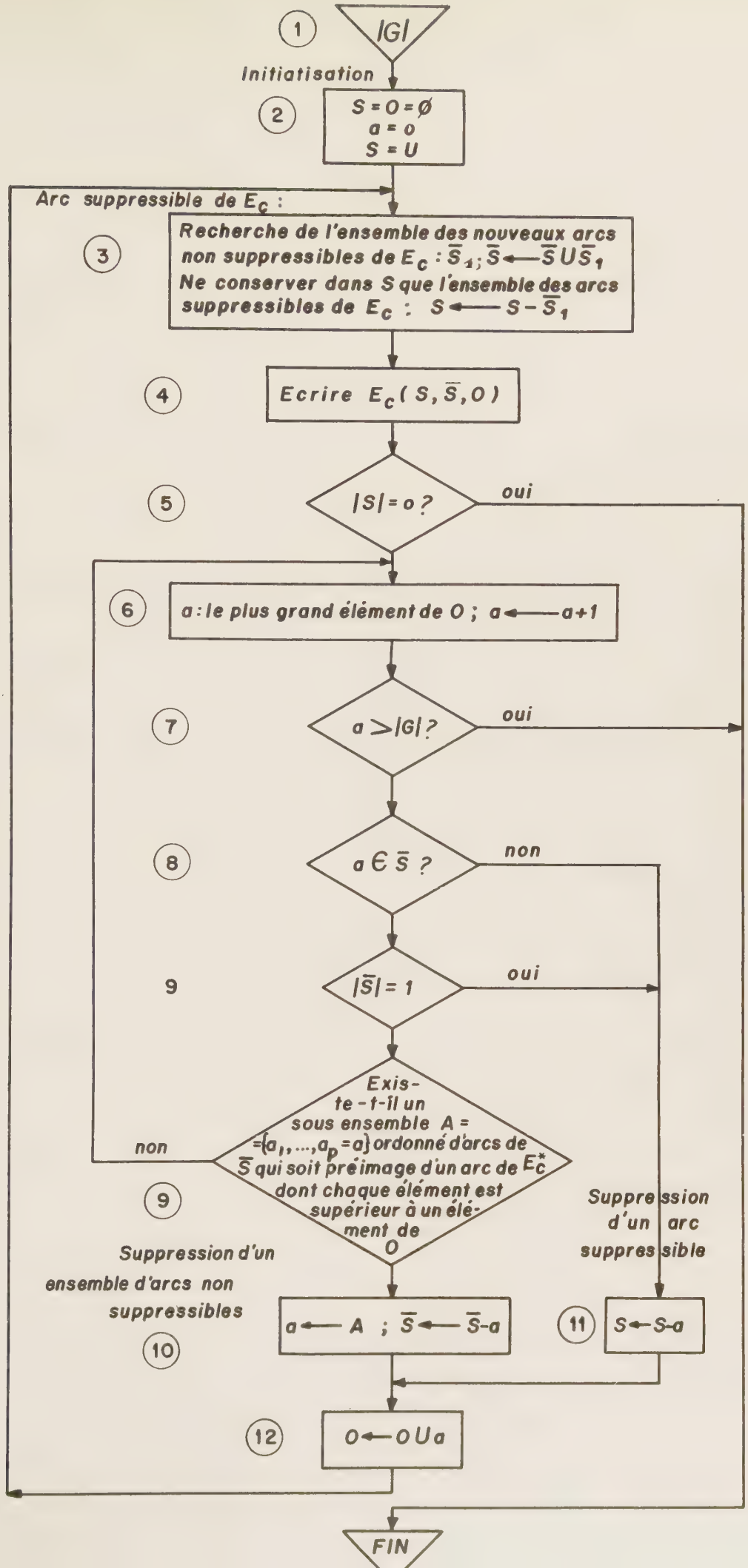
Nous donnons l'organigramme de la procédure et détaillons ensuite ses étapes essentielles.

Nous adoptons la notation "a" : pour désigner

- un arc suppressible de l'écoulement E, dans ce cas a est un entier,

- un ensemble d'arcs non suppressibles préimage d'un arc suppressible de l'écoulement réduit E^*; dans ce cas c'est une suite ordonné d'entiers.

Nous supposons d'autre part que le graphe de départ G = (X,U) est réduit. S'il ne l'est pas on le réduit avant de numéroter ses arcs.


1
|G|
Initiatisation
2
S = O = ∅
a = o
S = U
Arc suppressible de E_c :
3
Recherche de l'ensemble des nouveaux arcs non suppressibles de E_c : $\bar{S}_1$; $\bar{S} \leftarrow \bar{S} \cup \bar{S}_1$
Ne conserver dans S que l'ensemble des arcs suppressibles de E_c : $S \leftarrow S - \bar{S}_1$
4
Ecrire $E_c(S, \bar{S}, O)$
5
|S| = o ?
oui
6
a : le plus grand élément de O ; a ← a+1
7
a > |G| ?
oui
8
a ∈ $\bar{S}$?
non
9
$|\bar{S}| = 1$
oui
Existe-t-il un sous ensemble A = $\{a_1, \ldots, a_p = a\}$ ordonné d'arcs de $\bar{S}$ qui soit préimage d'un arc de E_c^* dont chaque élément est supérieur à un élément de O
non
9
Suppression d'un ensemble d'arcs non suppressibles
10
a ← A ; $\bar{S} \leftarrow \bar{S}$-a
Suppression d'un arc suppressible
11
S ← S-a
12
O ← O ∪ a
FIN

1°) Décrire G par sa matrice d'indidence arc-arcs : (G)

G(i,j) = 1 <=> j est successeur de i dans G (j > i)
G(i,j) = -G(j,i)

2°) Initialisation : puisque G est réduit, $\bar{S} = \Phi$, $O = \Phi$, $S = U$
$G = (\Phi,\Phi,U)$.

3°) Nous entrons dans une série de boucles permettant d'obtenir les descendants de G dans T(G).
Soit E' un écoulement obtenu à partir de $E = (S,\bar{S},O)$, par suppression d'un arc s de S ou d'un ensemble d'arcs $s_1,\ldots,s_p$ de $\bar{S}$; la recherche des nouveaux arcs non suppressibles de E' s'effectue grâce à la caractérisation des arcs non suppressibles dans la matrice de E' : (E') :

soit i un arc de E' :
s'il existe j unique tel que E'(i,j) = 1, alors j est non suppressible dans E'
soit k un arc de E' :
s'il existe j unique tel que E'(j,k) = 1, alors j est non suppressible dans E'.
Soit $\bar{S}_1$ l'ensemble des nouveaux arcs non suppressibles ainsi obtenus :

$$\bar{S} \leftarrow \bar{S} \cup \bar{S}_1$$

4°) Ecrire $E_c(S,\bar{S},O)$

$$S \cup \bar{S} \cup O = U$$
$$S \cap \bar{S} \cap O = \Phi$$

A partir de la matrice d'incidence de G, et des ensembles S, $\bar{S}$ et O on peut écrire la matrice d'incidence de E_c : (E_c). Il suffit d'ôter de (G) les lignes et colonnes correspondant aux éléments de O.

5°) 6°) 7°)

A partir de l'écoulement E_c, rechercher certains descendants de E_c dans T(G).

$E_c(S,\bar{S},O)$

a est le plus grand élément de O (si $a = |G|$ on est en fin E_c)

$a \leftarrow a+1$.

Si a appartient à S on obtient un nouvel écoulement $E_c(S-a, \bar{S}, O \cup a)$.

Si a appartient à $\bar{S}$ on cherche s'il existe un ensemble d'arcs A de $\bar{S}$ contenant a : $\{a_1,\ldots,a_k = a\}$ (que l'on ordonne) qui soit préimage d'un arc de E_c^*.

On a $O = b_1,\ldots,b_p = a-1$

Si on a : $a_k > b_p$

$a_{k-1} > b_{p-1}$

$\vdots$

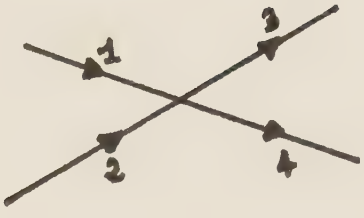
$a_1 > b_p-(k-1)$

Alors on supprime de E_c l'ensemble A ; on obtient ainsi un nouvel écoulement de T(G). Les inégalités ci-dessus permettent de ne pas obtenir deux fois le même écoulement, $E_c(S,\bar{S}-A, O \cup A)$.

Le repérage de A dans la matrice d'incidence se fait grâce à la caractérisation des arcs non suppressibles en commençant par a et en tenant compte du fait que a_i est un prédécesseur de a_{i+1} dans G : $a_1,\ldots,a_k$ forment une partie connexe d'une rivière de G.

Application :

Exemple 1 :



(G)	1	2	3	4
1			1	1
2			1	1
3	-1	-1		
4	-1	-1		

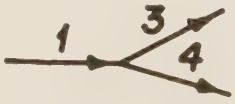
a = 0 G(1,2,3,4 ;Φ ;Φ)

a = 1 E_c(3,4 ; 2; 1)

a = 3 E_c(Φ; 2,4 ; 1,3) → Fin E_c

a = 4 E_c(Φ; 2,3 ; 1,4) → Fin E

a = 2 E_c(3,4 ; 1 ; 2)



a = 3 E_c(Φ; 1,4 ; 2,3) → Fin

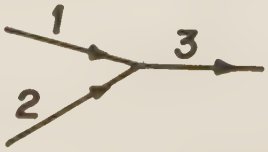
a = 4 E_c(Φ; 1,3 ; 2,4) →

Fin

a = 3 E_c(1,2 ; 4 ; 3)

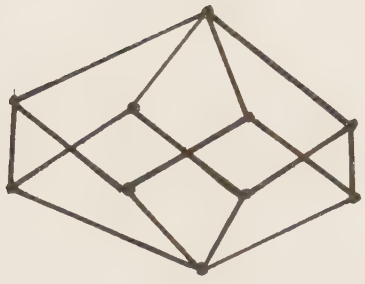
et a+1 est dans $\bar{S}$, mais card($\bar{S}$) = 1 ; Fin E_c

a = 4 E_c(1,2 ; 3 ; 4)



a+1 > Card(G), Fin E_c

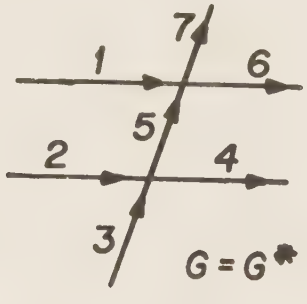
Rang T(G) = 3



Nous examinons un exemple où il faut rechercher des ensembles d'arcs non suppressibles de E formant un arc composé de E^*.

Exemple 2

G est le graphe série parallèle généralisé tel que Card(G) est minimal.



G	1	2	3	4	5	6	7
1						1	1
2				1	1		
3				1	1		
4		-1	-1				
5		-1	-1			1	1
6	-1				-1		
7	-1				-1		

a=0 $G(1,2,3,4,5,6,7\ ;\Phi\ ;\Phi)$

- a=1 $E_c(23467\ ;\ 5\ ;\ 1)$
  - a_2 $E_c(467\ ;\ 35\ ;\ 12)$
    - a=4 $E_c(67\ ;\ 35\ ;\ 124)$
      - a=6 $E_c(\Phi\ ;\ 357\ ;\ 1246)$
      - a=7 $E_c(\Phi\ ;\ 356\ ;\ 1247)$
    - a=6 $E_c(4\ ;\ 357\ ;\ 126)$
      $\tilde{5}.7$ est suppressible dans E_c^* ; 7 > 6, 5 > 2 ou 7 et 2 sont dans 0.
      - a=5,7 $E_c(\Phi\ ;\ 34\ ;\ 12567)$
    - a=7 $E_c(4,356\ ;\ 127)$
  - a=3 $E_c(467\ ;\ 25\ ;\ 13)$
    - a=4 $E_c(67\ ;\ 25\ ;\ 134)$
      $\tilde{2}5$ est non suppressible dans E_c^*
      - a=6 $E_c(\Phi\ ;\ 256\ ;\ 1346)$
      - a=7 $E_c(\Phi\ ;\ 257\ ;\ 1347)$
    - a=6 $E_c(4\ ;\ 257\ ;\ 136)$
      $\tilde{5}.7$ est suppressible dans E_c^* ; 7 > 6, 5 > 3 où 3 et 6 sont dans 0
      - a=5,7 $E_c(\Phi\ ;\ 24\ ;\ 13567)$
    - a=7 $E_c(4\ ;\ 256\ ;\ 137)$
  - a=4 $E_c(2367\ ;\ 5\ ;\ 14)$
    - a=6 $E_c(23\ ;\ 57\ ;\ 146)$
      $\tilde{5}.7$ est non suppressible dans E_c^*
    - a=7 $E_c(23\ ;\ 56\ ;\ 147)$
  - a=6 $E_c(234\ ;\ 57\ ;\ 16)$
    $\tilde{5}.7$ est suppressible dans E_c^* et 5 > 1, 7 > 6 ou 1 et 6 sont dans 0
    - a=5,7 $E_c(23\ ;\ 4\ ;\ 1567)$
  - a=7 $E_c(234\ ;\ 56\ ;\ 17)$
- a=2 $E_c(14567\ ;\ 3\ ;\ 2)$
  - a=4 $E_c(167\ ;\ 35\ ;\ 24)$
    $\tilde{3}.5$ est suppressible dans E_c^* ; 5 > 4, 3 > 2 où 4 et 2 sont dans 0
    - a=3,5 $E_c(67\ ;\ 1\ ;\ 2345)$
      - a=6 $E_c(\Phi\ ;\ 17\ ;\ 23456)$
      - a=7 $E_c(\Phi\ ;\ 16,23457)$
    - a=6 $E_c(1\ ;\ 357\ ;\ 246)$
      $\tilde{3}\tilde{5}7$ et $\tilde{5}.7$ ne sont pas des arcs de E_c^*
    - a=7 $E_c(1\ ;\ 356\ ;\ 247)$

a=5 E_c(67 ; 134 ; 25)
  a=6 E_c(Φ; 1347 ; 256)
  a=7 E_c(Φ; 1346 ; 257)
a=6 E_c(145 ; 37 ; 26)
  $\tilde{3.7}$ n'est pas un arc de E_c^*.
a=7 E_c(145 ; 36 ; 27)

a=3 E_c(1,4,5,6,7 ; 2 ; 3)

Cette étape se déduit de l'étape a=2 (car 2 et 3 jouent le même rôle) en intervertissant 2 et 3 dans l'étape a=2 et en supprimant les sous étapes obtenues, où 2 figure, pour ne pas obtenir plusieurs fois le même écoulement.

a=4 E_c(167 ; 25 ; 34)
  a=6 E_c(1 ; 257 ; 346)
  a=7 E_c(1 ; 256 ; 347)
a=5 E_c(67 ; 124 ; 35)
  a=6 E_c(Φ ; 1247 ; 356)
  a=7 E_c(Φ ; 1246 ; 357)
a=6 E_c(145 ; 27 ; 36)
a=7 E_c(145 ; 26 ; 37)

a=4 E_c(12367 ; 5 ; 4)

Cette étape se déduit de l'étape a=1 (car 1 et 4 jouent des rôles symétriques) en intervertissant dans l'étape a=1, 1 et 4 et en supprimant les étapes ainsi obtenues qui contiennent dans a un élément inférieur à 4.

a=6 E_c(123 ; 57 ; 46)
a=7 E_c(123 ; 56 ; 47)

a=5 E_c(2367 ; 14 ; 5)
  a=6 E_c(23 ; 147 ; 5 6)
  a=7 E_c(23 ; 146 ; 57)

a=6 E_c(12345 ; 7 ; 6)

a=7 E_c(12345 ; 6 ; 7)

Dans chaque colonne figure les éléments de même rang de T(G).

On retrouve le fait que rang T(G) = 5.

Au rang 1 : 357
356
34
256
257
24
17
16

Au rang 2 : 3567
3457
3456
2567
2457
2456
2357
2356
234
167
1357
1356
1347
1346
1257
1256
1247
1246

Au rang 3 : 34567
24567
23567
23457
23456
13567

13467
13457
13456
12567
12467
12457
12456
12357
12356
12347

Au rang 4 : 234567
134567
124567
123567
123467
123457
123456

Au rang 5 : 1234567

Il serait aisé de fournir d'autres méthodes différentes de recherche des écoulements d'un graphe. Nous n'avons ici présenté que deux algorithmes à titre d'exemple.

CHAPITRE - IV

APPLICATIONS

Nous formalisons algébriquement à l'aide, entre autre, de la notion d'écoulement, le travail de M. Montagnon (1). Quelques résultats sont fournis en ce qui concerne les fonctions synthétisables sur les réseaux modulaires Δn.

La partie concernant la testabilité de ces réseaux est liée à la notion de "Pannes dans les réseaux acycliques" (2). Nous utilisons les relations de préordre entre les pannes de sous réseaux particuliers.

(1) Synthèse booléenne dans les réseaux cellulaires (1970)

(2) Pannes dans les réseaux acycliques. M. Verdillon (1972)

I - OUTILS DE SYNTHESE POUR UN TYPE DE RESEAUX MODULAIRES

I-1 - Fonctions booléennes et matrices associées

I-1-1 - Représentation d'une fonction booléenne

$F(x_1,\ldots,x_n)$: fonction booléenne simple ($F(x_1,\ldots,x_n) \in \{0,1\}$) de n variables booléennes simples $x_i \in \{0,1\}$ $\quad i = 1,2,\ldots,n$.

F est donnée sous forme canonique en somme de produits (S.P.)

$$* \qquad F = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$$

$$* \qquad \mu_i = \prod_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \quad \text{avec } \tilde{x}_j \in \{x_j, x'_j\}$$

Un monôme canonique μ_i sera représenté par un vecteur booléen de n variables.

$$(F_{ij})_{j=1,\ldots,n} \qquad F_{ij} \in \{0,1\}$$

avec

$F_{ij} = 0$ si $\mu_i . x_j = 0$ (la variable x_j apparait sous forme indirecte dans μ_i

$= 1$ si $\mu_i . x_j = \mu_i$

ex : $\mu = x_1 x'_2 x_3 x_4 x'_5$

$(F_{ij}) = (1\ 0\ 1\ 1\ 0)$

Une fonction sera représentée par une matrice de m lignes.

$$(F_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

Chaque ligne (F_{ij}) représentant le vecteur associé au monôme μ_i couvert par la fonction

Ex : $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3')x_2+x_2'.x_4$

$n = 4$

$m = 10$

$$(F_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I-1-2 - Base d'une représentation

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé l'énoncé des variables représenté par :

$$P = (x_1,x_2,\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

Les variables y sont ordonnées par ordre d'indices croissant

y apparaissant sous forme directe.

Nous appellerons P "base principale" et définirons plus généralement une base quelconque B par :

$$B = (x_{\gamma(1)}^{\beta_1},x_{\gamma(2)}^{\beta_2},\ldots,x_{\gamma(i)}^{\beta_i},\ldots,x_{\gamma(n)}^{\beta_n})$$

γ étant une permutation des n premiers entiers :

$$\{\gamma(1),\gamma(2),\ldots,\gamma(n)\} \equiv \{1,2,\ldots,n\}$$

et

$$\beta_i \in \{0,1\}$$

avec

$$x^0 = x'$$
$$x^1 = x$$

Nous passons ainsi de la base principale à une base B par une opération $\tau = \beta \circ \gamma$, produit d'une permutation γ par une opération de complémentation β .

Dans la base principale P une fonction F sera représentée par la matrice (F_{ij}) précédemment définie que nous noterons F^P pour plus de clarté.

Dans une base quelconque B nous aurons une matrice F^B définie par :

$$F^B{}_{ij} = 1 \iff \mu_i . x_{\gamma(j)}^{\beta_j} = \mu_i$$

$$F^B{}_{ij} = 0 \iff \text{-----} = 0$$

pour $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,n$.

étant bien entendu que l'opération de complémentation β intervient une fois gérée la permutation γ , ce que traduit la loi de composition "0" dans $\tau = \beta \circ \gamma$.

I-1-3 - Changement de base

- de la base principale à une base quelconque

$$B = \tau(P) \text{ où } \tau = \beta \circ \gamma$$

avec

$$\beta \circ \gamma = ('\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n' \circ \gamma(1),\ldots,\gamma(n))$$

Nous aurons :

$$F^B_{ij} = F^P_{i,\gamma(j)} \, @ \, \beta_j$$

c'est-à-dire les variables sont complémentées dans leur nouvelle position.

Exemple 1

$$\tau = ('001010' \circledcirc (1,3,4,6,5,2))$$

$$B = (x'_1,x'_3,x_4,x'_6,x_5,x'_2)$$

Exemple 2

Considérons la fonction $F = (x_1+x'_3)x_2$ et la base $B = (x'_1x'_3x_2)$.

τ est définie par :

$$\tau = ('001' \circ (1,3,2)) = \beta \circ \gamma$$

Nous avons :

$$F_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\gamma(P)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{\beta \circ \gamma(P)} = F_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entre deux bases quelconques

$$B = \beta \circ \gamma(P)$$

$$B' = \beta' \circ \gamma'(P)$$

alors :

$$B' = \beta'' \circ \gamma''(B)$$

avec

$$\beta'' = (\gamma' \circ \gamma^{-1}(\beta)) \odot \beta'$$

$$\gamma'' = \gamma' \circ \gamma^{-1}$$

et :

$$F^{B'}_{ij} = F^{B}_{i,\gamma''(j)} \odot \beta''$$

Exemple :

Pour la fonction F précédemment définie, considérons la nouvelle base $B' = (x_2 x'_3 x_1)$ pour laquelle $\tau = \beta' \circ \gamma' = '101' \circ 2,3,1$

$$B' = \beta'' \circ \gamma''(B)$$

avec

$$\gamma'' = (2,3,1) \circ (1,3,2)$$

$$\beta'' = \gamma''(\beta) \odot \beta' = '100 \odot 101' = '110'$$

$$B' = ('110' \circ (2,3,1) \circ (1,3,2))(x'_1 x'_3 x_2)$$

$$= (x_2 x'_3 x_1)$$

De même on obtient :

$$F^{B}_{i,\gamma''(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^{B'}_{ij} = F^{B}_{i,\gamma''(j)} \odot \beta''_j$$

d'où

$$F^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

I-2 - Les réseaux de synthèse Δ_n - Matrices associées

I.2.-1 - Définition des réseaux Δ_n

Structure d'un réseau :

Le réseau de synthèse utilisé se définit comme un graphe aux arcs marqués.

S : ensemble des sommets du graphe

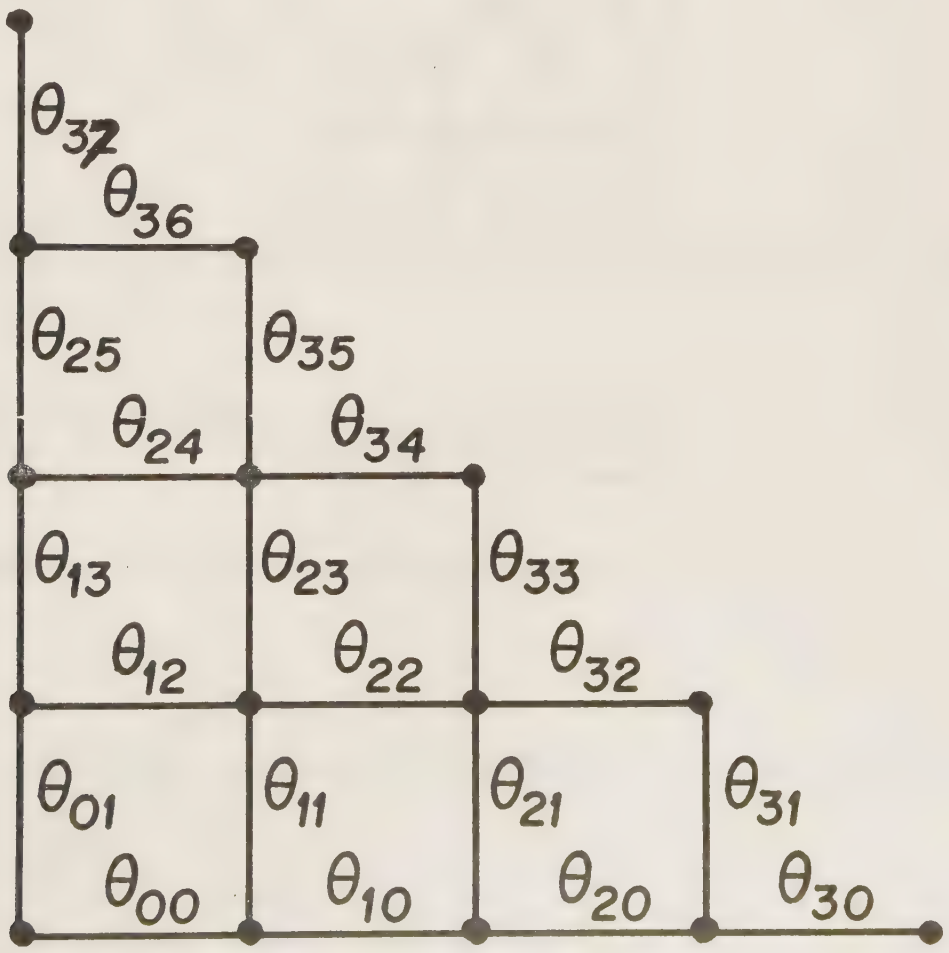
U : " " arcs " "

θ : loi de répartition des marques :

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ sur les arcs du graphe.

- Loi de répartition sur les arcs du graphe :

- Le graphe



Exemples de lois de répartition

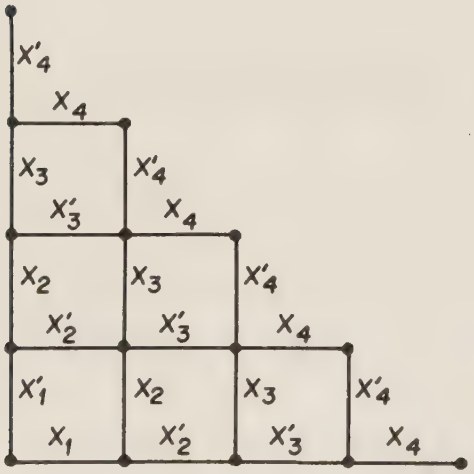
1°) Loi naturelle θ_N

Elle est définie par $\theta_{ij} = \theta_{i,o}^{P(j)}$ | P(j) = 1 si j pair
P(j) = 0 sinon

Cette relation définit la loi de répartition à partir de la premièr ligne du graphe.
Remarquons que cette loi ne fait pas jouer le même rôle aux lignes et aux colonnes.

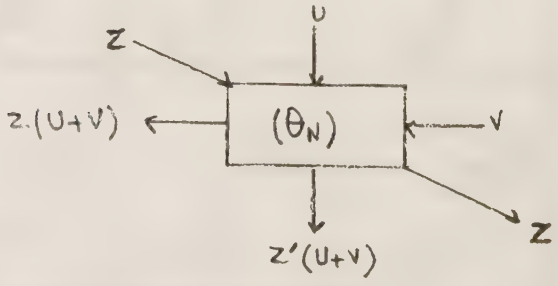
Exemple : Δ_4 avec θ_N

La première ligne étant
$x_1 x'_2 x'_3 x_4$



Cette loi correspond à l'opérateur (θ_N) symbolisé par chaque sommet du graphe.

z est une variable d'entrée lié à la première colonne (à gauche)



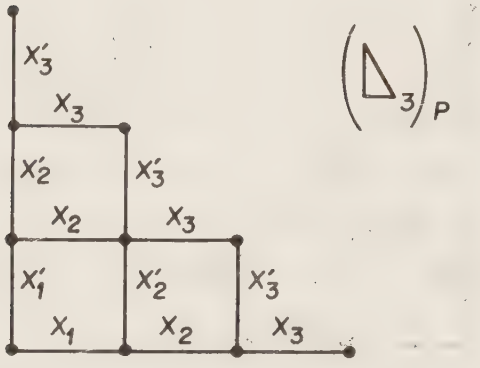
2°) Loi θ_1

$$\theta_{ij} = \theta_{i,o}^{K(j)} \text{ avec } K(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j = 1 \text{ ou } 1 \text{ (modulo 4)} \\ 1 \text{ si } j = 3 \text{ ou } 4 \text{ (modulo 4)} \end{cases}$$

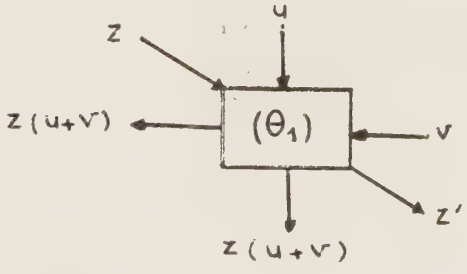
Cette loi est aussi définie par rapport à la première ligne du graphe.

Exemple : Δ_3 avec θ_1

La première ligne étant : $x_1 x_2 x_3$



Elle correspond à l'opérateur (θ_1) symbolisé par chaque sommet du graphe.



z est encore une variable d'entrée liée à la première colonne.

- Base d'un réseau

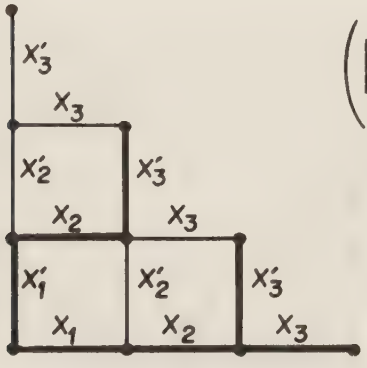
En généralisant la notion de base d'une représentation, nous appellerons "base d'un réseau Δ_n" l'ensemble :

$$B = \{\theta_{oo}, \theta_{10}, \theta_{20}, \ldots, \theta_{n-1,0}\}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple de θ_N avec la base principale, c'est-à-dire $\theta_{i,o} = x_i \quad \forall i = 0,\ldots,n-1$ et considérons la fonction

$$F = (x_1 + x_3')x_2$$



$(\Delta_3)_P$

Sous forme canonique : $F = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3' + x_1'x_3'x_2$.

Forme booléenne de F dans la base principale

$$F_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I-2-2 - Implantation sur Δ_n d'une fonction booléenne suiva le choix de l'opérateur (Θ_1) ou (Θ_N)

Le réseau comporte 2^n chemins allant des sources aux puits. Nous nous plaçons ici dans le cas de répartitions θ telles que l'on ai bijection entre les 2^n sommets de l'hypercube à n dimensions et les 2^n chemins.

Cette bijection est définie par :

> pour chaque chemin allant d'une source au puit, on fait le produit des marques apparaissant sur les arcs de ce chemin. On obtient ainsi un monôme canonique, image du chemin.

A une fonction F couvrant m monômes canoniques, nous associerons ainsi les m chemins images des m monômes.

Cette association se fait grâce à la matrice d'implantation de F.

Matrice d'implantation : Définition

Etant donnée une fonction F de matrice (F^B_{ij}) à synthétiser sur un réseau de base B, pour une répartition θ,

nous définirons la matrice d'implantation de F :

$$I^B_\theta(F) = (\alpha^B_{ij})^{i=1,\ldots,m}_{j=1,\ldots,n} = \theta(\{F^B_{ij}\})$$

avec $\alpha_{ij} = 0$ si le jième arc du chemin représentant le ième monôme est vertical (jième arc en partant du puit)

$\alpha_{ij} = 1$ si cet arc est horizontal.

Exemple 1 : Pour la loi de répartition θ_N

nous aurons

$$I^B_{\theta_N} = F_B$$

D'où le nom de répartition"naturelle".

Exemple 2 : Considérons la répartition θ_2.

Pour cette loi la matrice d'implantation sera définie par :

$$\alpha^B_{i_1} = F^B_{i_1}$$

$$\alpha^B_{ij} = F^B_{ij} \; \theta \; F^B_{i,j-1} \qquad \forall \; j = 2, \ldots, n \; ;$$

avec $F^B_{i,o} = 1$

Application à la fonction $F = (x_1+x'_3)x_2+x'_2x_4$ dans la base $B = \{x_1, x_2, x'_3, x_4\}$.

$$F_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_B = F_P \; \theta \; '1 \; 1 \; 0 \; 1'$$

$$F_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas de la loi θ_N

$$F_P = I^P_{\theta_N}(F)$$

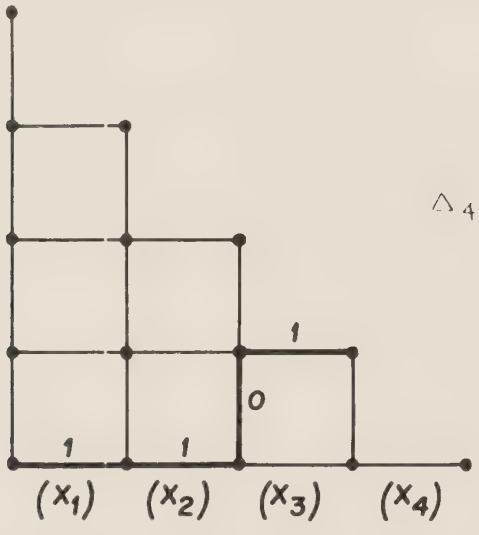
$$F_B = I^B_{\theta_N}(F)$$

Cas de la loi θ_1

$$I^P_{\theta_1}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque ligne de cette matrice représente un chemin dans Δn pour la loi θ_1.

Par exemple la ligne : 1 1 0 1 de $I^{P}_{\theta_1}$ (F) représente le chemin :



. Changement de base

Un changement de base a été défini comme le produit d'une permutation et d'une complémentation. L'effet du changement de base sur la matrice d'implantation est fonction de la loi de répartition .

Exemple 1 : Loi θ_N

Nous avons vu que dans ce cas la matrice d'implantation est identique à la matrice de la fonction booléenne pour une même base B. Ce cas a donc déjà été étudié en I-1-3.

Exemple 2 :

Soit $I^{B}_{\theta_1}$ la matrice d'implantation de F dans la base

$B = \beta \circ \gamma$ (P)

. Opérons sur cette base une complémentation d

La nouvelle base est :

$B' = (\beta \oplus d) \circ \gamma$ (P)

L'implantation de F dans B' est définie par :

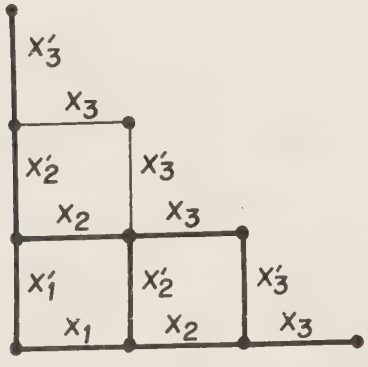
$$(I^{B'}_{\theta_1})_{ij} = (I^{B}_{\theta_1})_{ij} \oplus d_j \oplus d_{j-1}$$

Exemple

$$F = x_1x_2 + x'_3$$

$$F_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I^P_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

F sur Δ^P_3



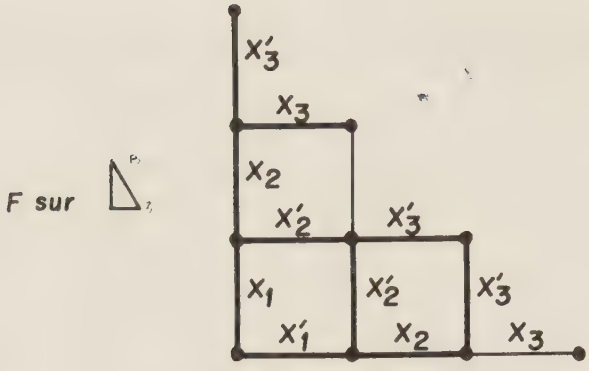
Soit la complémentation d = 0 0 1

La nouvelle base est B = ((111 ⊕ 001)' o 1,2,3)

B = (001' o 1,2,3)

= $x'_1x'_2x_3$

$$I^B_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \oplus\ 0\ 0\ 0\ 1 = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



. Opérons sur la base B une permutation γ' de 2 indices de γ (soient et k ces indices).

$$\gamma = \gamma(1)\ \gamma(2)\ \ldots\ \gamma(\ell)\ \ldots\ \gamma(k)\ \ldots\ \gamma(n)$$

$$\gamma' \circ \gamma = \gamma(1)\ \gamma(2)\ \ldots\ \gamma(k)\ \ldots\ \gamma(\ell)\ \ldots\ \gamma(n)$$

Soit $B'' = \left(\gamma'(\beta) \circ (\gamma' \circ \gamma^{-1})\right)$ la nouvelle base.

Alors l'implantation de F dans la base B' est définie par :

$$(I_{\theta}^{B''})_{1\ ij} = (I_{\theta}^{B})_{1\ ij} \oplus \left(\bigoplus_{p=\ell+1}^{k} (I_{\theta}^{B})_{1\ ij} \right) \qquad \text{si } j = \ell,\ \ell+1,\ k,\ k+1$$

$$(I_{\theta}^{B''})_{1\ ij} = (I_{\theta}^{B})_{1\ ij} \qquad \text{si } j \neq \ell,\ \ell+1,\ k,\ k+1$$

Remarque : Dans le cas particulier où $k = \ell+1$, alors

$$(I_{\theta}^{B''})_{1\ \ell+1,j} = (I_{\theta}^{B})_{1\ \ell+1,j}$$

Exemples :

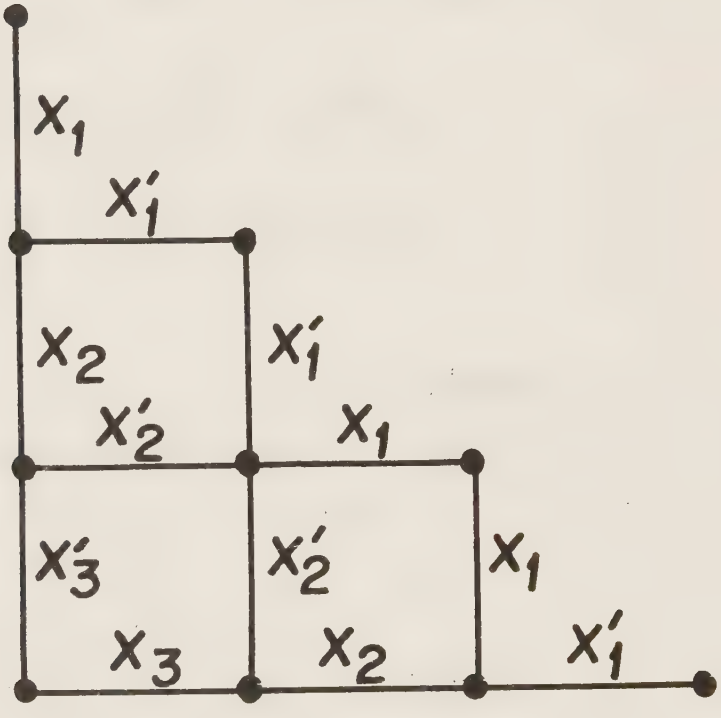
Permutons les indices 1 et 3 dans l'exemple précédent :

- $B'' = \{100 \circ 3,2,1\}$
  $= x_3 x'_2 x'_1$

$$I^{B''}_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&1 \\ 1&1&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$$

F sur $\Delta_3^{B''}$



Nous pouvons ainsi traiter une permutation quelconque comme produit de ces permutations élémentaires, et un changement de base quelconque.

I-2-3 - Matrice d'intersection

Pour une fonction F synthétisée dans un réseau de base B et de loi θ nous définissons sa matrice d'intersection : $\Lambda_\theta^B(F)$ par :

2 monômes μ_i et μ_j couverts par F se coupent au sommet s_k avec $k > 1$ si les coefficients Λ_{ik} et Λ_{jk} sont égaux et seulement si il existe 2 indices ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\Lambda_{i\ell_1} \neq \Lambda_{j\ell_1}$ $\quad \ell_1 > k$

$\Lambda_{i\ell_2} \neq \Lambda_{j\ell_2}$ $\quad \ell_2 < k$

ce qui se traduit par la relation suivante :

$$\left|\begin{array}{l} \Lambda_\theta^B(F) = (\Lambda_\theta^B)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ \\ (\Lambda_\theta^B)_{ij} = (\Lambda_\theta^B)_{i,j-1} + (I_\theta^B)_{i,j} \qquad \forall\, j = 2, \ldots, n \\ \\ (\Lambda_\theta^B)_{i,1} = (I_{\theta_1}^B)_{i,1} \end{array}\right.$$

Exemple :

Soit F une fonction dont l'implantation dans la base B pour la loi θ est :

$$I_\theta^B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \mu_1 \\ \to \mu_2 \\ \to \mu_3 \\ \to \mu_4 \end{array}$$

$$\Lambda_\theta^B(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \mu_1 \\ \to \mu_2 \\ \to \mu_3 \\ \to \mu_4 \end{array}$$

μ_2 et μ_4 se coupent au rang 3 sur $(\Delta_3)_\theta^\theta$ car $\Lambda_{2,3} = \Lambda_{4,3}$;

$\Lambda_{2,4} \neq \Lambda_{4,4}$;

et $\Lambda_{2,1} \neq \Lambda_{2,1}$.

I-2-4 - Compatibilité des monômes canoniques de F. Fonctions synthétisables

- Monômes compatibles : cas de 2 monômes

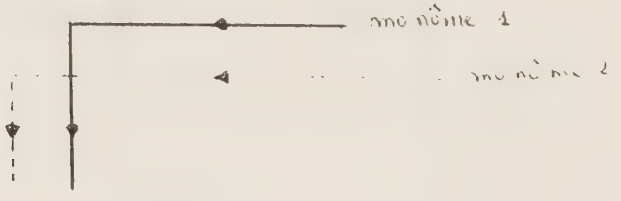
* Nous n'avons pas évoqué jusqu'ici, dans nos définitions, la question suivante :

Pour une loi θ donnée,

—— base B ——

toute fonction booléenne est-elle synthétisable par le procédé des paragraphes (I-2) 1,2,3?

La réponse est évidemment : NON. Comme contre-exemple il suffit de prendre une fonction somme de 2 monômes se coupant sur le réseau.



Les 2 chemins associés aux 2 monômes forment du fait de leur intersection 4 rivières représentant 4 monômes. Et la synthèse ainsi réalisée couvre, au sens strict, la fonction (monôme 1) + (monôme 2).

* Autre question :

Pour une loi θ donnée,
toute fonction booléenne est-elle synthétisable ?

Ici on se permet d'opérer des changements de base à volonté. Là encore la réponse est : NON.

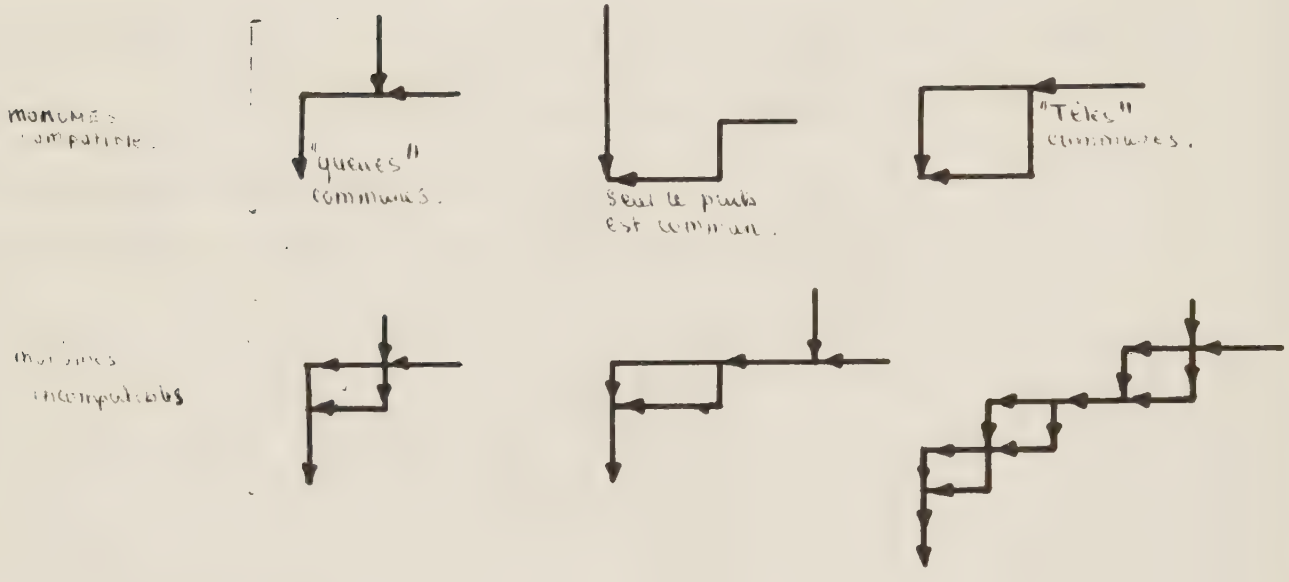
Contre-exemple :

F = x ⊕ y ⊕ z n'est pas synthétisable avec θ_1 ([illegible]).

Définition :

Pour une loi θ et une base B donnée, 2 monômes μ_i et μ_j seront dit compatibles si leurs rivières associées dans Δ_θ^B forment un écoulement (voir chapitre II-B-3).

Ex. : Les configurations possibles stylisées sont les suivantes :



* Conséquences pour les matrices.

Considérons la matrice d'intersection de 2 monômes :

(Λ_{ij}^B) $i = 1, 2$

Ils seront compatibles si et seulement si :

la matrice $(\Lambda_{ij}^B)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ conduit sur l'organigramme qui suit à l

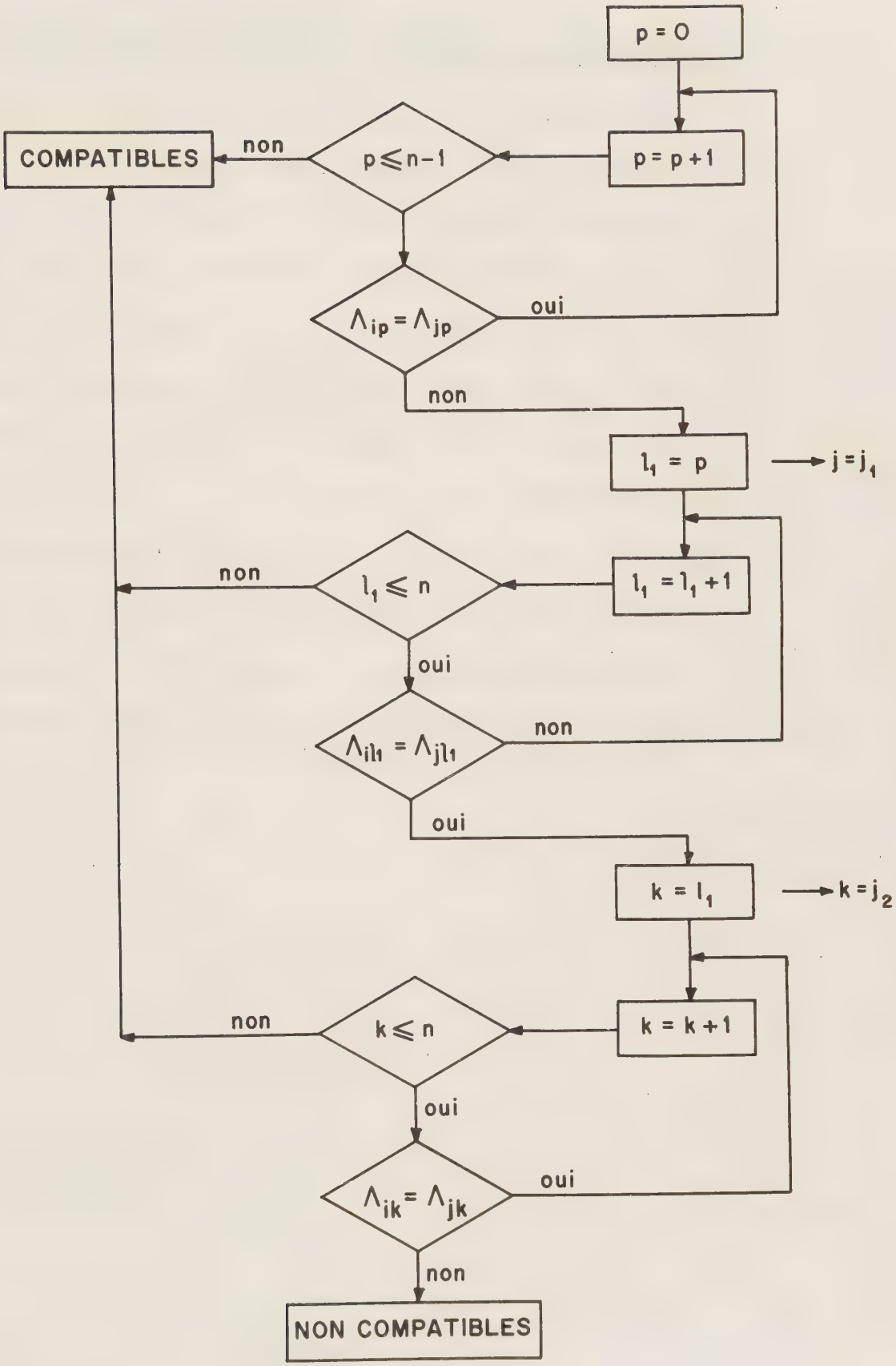
case "compatible", c'est à dire

$$T_{\mu_1}(\tilde{x}_k) = T_{\mu_2}(\tilde{x}_k)$$

ou

$$Q_{\mu_1}(\tilde{x}_k) = Q_{\mu_2}(\tilde{x}_k)$$

$\forall$ k tel que $\tilde{x}_k \in \mu_1 \cap \mu_2$


p = 0
p = p + 1
p ≤ n-1
non
COMPATIBLES
Λip = Λjp
oui
non
l1 = p
j = j1
l1 = l1 + 1
l1 ≤ n
non
oui
Λil1 = Λjl1
non
oui
k = l1
k = j2
k = k + 1
k ≤ n
non
oui
Λik = Λjk
oui
non
NON COMPATIBLES

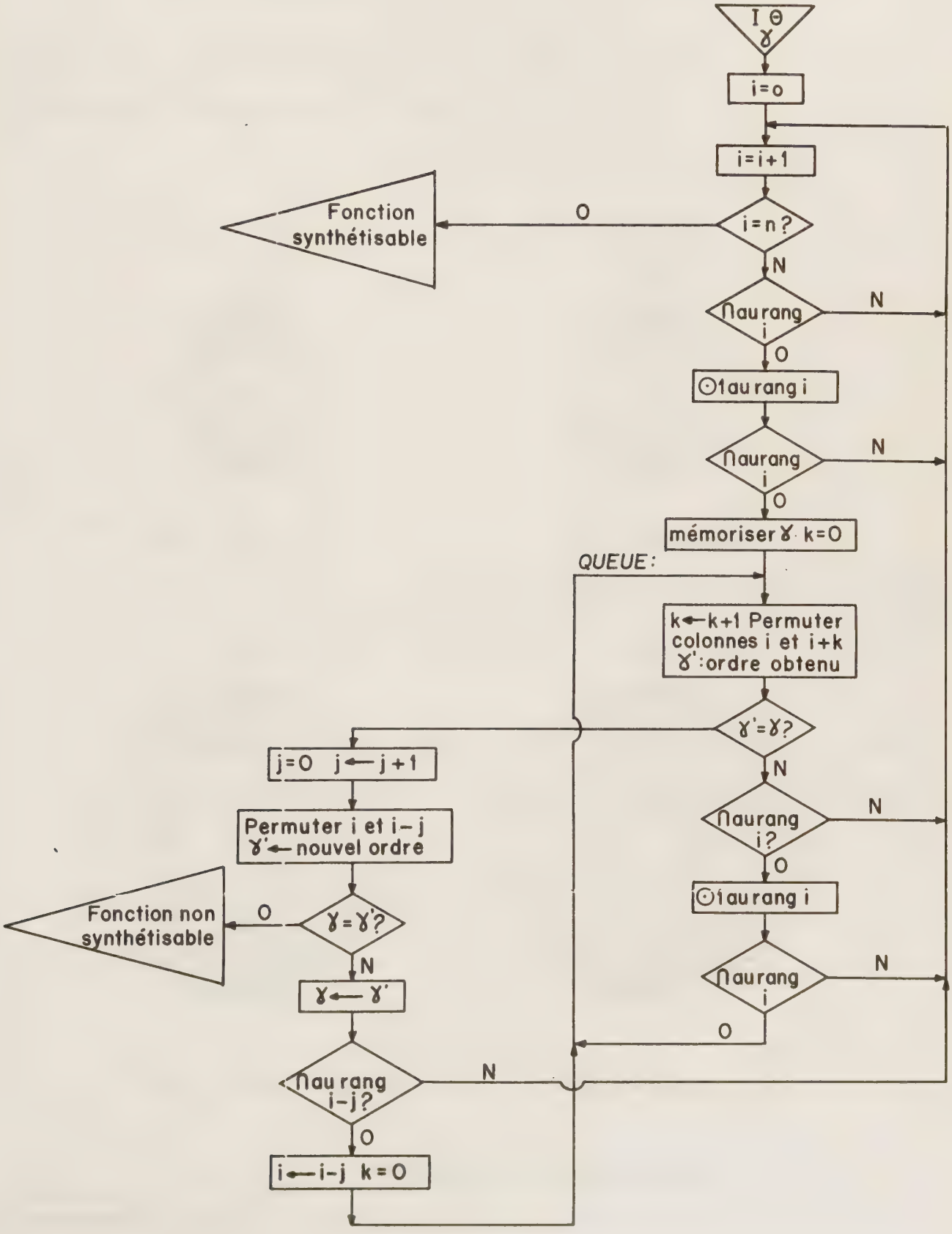
- Considérons une fonction $F = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$ et attachons nous plus particulièrement au cas de 2 monômes μ_1 et μ_2 appartenant à F. Sur un réseau leurs sont associées deux rivières r_1 et r_2.
Si ces 2 rivières se coupent de façon à en former 4 : r_1, r_2, r_3, r_4, d'après ce que nous avons vu, μ_1 et μ_2 sont incompatibles.

Mais si les monômes μ_3 et μ_4, d'images r_3 et r_4 appartiennent à F : μ_3 et $\mu_4 \subseteq F$, le fait que μ_1 et μ_2 soient incompatibles, ($\mu_1 + \mu_2$ non synthétisables) n'entraîne pas que F ne soit pas synthétisable sur ce réseau.

La fonction $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ sera synthétisable, puisque sur le réseau, seuls leurs 4 rivières images seront représentées.

* F est sythétisable sur un réseau $(\Delta_n)_{\theta}^{\theta}$ si et seulement si l'ensemble des rivières, images sur le réseau des monômes canoniques de F, est un écoulement.

I-3 - Un algorithme [7] de synthèse sur Δ_n présenté avec ces outils



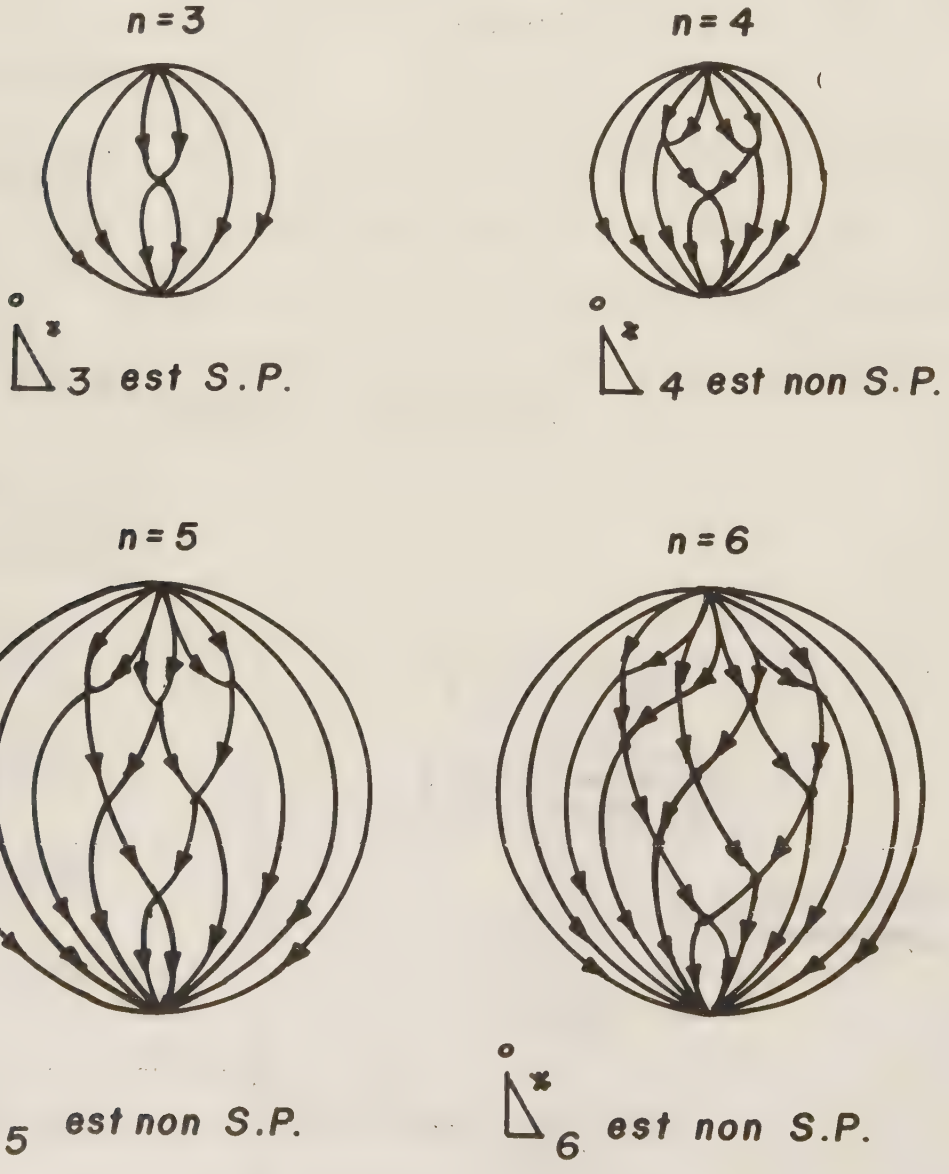
II - QUELQUES CLASSES DE FONCTIONS SYNTHETISABLES SUR Δ_n AVEC (θ_N) et (θ_1)

II-1 - Caractéristiques du treillis des écoulements de Δ_n

Rappelons: que Δ_n^{o*} désigne le graphe totalement réduit de Δ_n
que Δ_n^o et Δ_n sont dans la même classe de E-équivalence ;

ils ont donc même treillis d'écoulement.

Représentant de Δ_n dans sa classe de E-équivalence



Nombre d'arcs du graphe réduit de Δ_n :

$|\Delta_n^*| = 4 + (n+1)(n+2)$ car il y a $2(n-1)$ arcs non ~~supprimés~~ Suppressibles dans Δ_n.

Degré de réduction de Δ_n :

$$\alpha_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Rang du treillis des écoulements de Δ_n :

$$R(T_{(\Delta_n)}) = |\Delta_n| - \alpha_n = \frac{n^2+5n-2}{2}$$

II-2 - A tout ensemble de fonctions synthétisables sur Δ_n avec (θ_N) correspond un ensemble de fonctions synthétisables avec (θ_1) et réciproquement - Loi I_θ

Soit I_θ la loi d'implantation qui permet d'évaluer l'implantation I_θ, en fonction de l'opérateur θ, à partir de la matrice booléenne (F) d'une fonction F.

$$(F) \longrightarrow I_\theta(F)$$

Rappels :

$$I_{\theta_N} = \mathbf{1} \text{ (identité)}$$

$$(I_{\theta_1})_{ij} = F_{ij} \,\theta\, F_{i,j-1}$$

Soit F_{θ_N} une fonction synthétisable sur Δ_n avec (θ_N).

Soit F_{θ_1} la fonction synthétisable sur θ_1 définie par :

$$I_{\theta_1}(F_{\theta_1}) = (F_{\theta_N})$$

$$\boxed{F_{\theta_1} = I_{\theta_1}^{-1}(F_{\theta_N})}$$

Réciproquement, étant donnée une fonction F_{θ_1} synthétisable avec θ_1, il lui correspond une fonction F_{θ_N}, synthétisable avec θ_N, définie par :

$$\boxed{F_{\theta_N} = I_{\theta_1}(F_{\theta_1})}$$

Loi I_θ^{-1}

Soit $\mu_N = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ un monôme canonique quelconque d'une fonction F_{θ_N} synthétisable avec θ_N. Le monôme canonique correspondant de la fonction F_{θ_1} synthétisable avec θ_1 est :

$\mu_1 = \tilde{X}_1\tilde{X}_2 \ldots \tilde{X}_n$ défini par :

$$\tilde{X}_j = x_j^{x_1 \theta x_2 \theta \ldots \theta x_{j-1} \theta x_j}$$

Exemple 1 :

$$r_{\theta_N} = x_1 + x_2 + \ldots + (x_{2p}/x_{2p+1})$$

On montre que l'ensemble des fonctions correspondantes synthétisables sur θ_1 est :

$$F_{\theta_1} = x_1 + X_2' + x_3 + \ldots + (x_{2p}'/x_{2p+1})$$

Par complémentation de la base principale ces fonctions F_{θ_1} sont synthétisables avec θ_N. L'ensemble des fonctions $(\mathcal{F}_{\theta_N})$ fait globalement partie du noyau de I_θ^{-1} : $\mathcal{F}_{\theta_N} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_n$

Exemple 2 :

$$F_{\theta_1} = x_1x_2+x_3$$

$$(F_{\theta_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad F_{\theta_N} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{\theta_N} = x_1x_2+(x_1+x_2)\theta x_3$$

II-3 - Fonctions à deux et trois monômes canoniques

II-3-1 - Cas de deux monômes

Propriété 1 : Toute fonction booléenne constituée par l'ensemble de 2 monômes canoniques est synthétisable sur Δ_n avec (θ_1) ou (θ_N) indifféremment quelque soit l'ordre γ des variables

En effet soit $F = \mu_1+\mu_2$

soient: θ l'opérateur utilisé ((θ_1) ou (θ_N))

et γ un ordre quelconque des variables.

Soit $I^P_\theta(F)$ son implantation : soit i le plus petit indice tel que μ_1 et μ_2 s'y coupent au rang i; nous faisons le changement de base définissant B_1 :

$$B_1 = (11 \ldots \underset{\uparrow}{101} \ldots 1 \text{ o } \gamma)$$

rang i

C'est à dire que dans la matrice d'intersections les coefficients égaux de la colonne i sont rendus inégaux. A l'un d'eux on soustrait l'unité (ainsi qu'aux éléments des colonnes d'indices supérieurs à i) à l'autre on ajoute l'unité (ainsi qu'aux éléments d'indices supérieurs à i).

Alors μ_1 et μ_2 ne peuvent se couper quà un rang j, j > i. Nous éliminons ainsi pas à pas les incompatibilités de μ_1 et μ_2.

Exemple :

$$F = x_1x_2'x_3'x_4'x_5 + x_1'x_2x_3x_4'x_5$$

$$(F^P_{\theta_N}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = 1,2,3,4,5$$

$$(\Lambda^P_{\theta_N}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les monômes se coupent au rang 2.

Le changement de base à effectuer est :

$$P \to B = \beta \circ \gamma$$

où β = '1 0 1 1 1' c'est à dire $B = x_1x_2'x_3x_4x_5$

$$(F^B_{\theta_N}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda^B_{\theta_N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les coefficients $\Lambda^B_{\theta_N}(1,2)$ et $\Lambda^B_{\theta_N}(2,2)$ sont désormais inégaux.

Les coefficients de $\Lambda^B_{\theta_N}$ sont désormais soient ingéaux, soient égaux à partir de la 3ème colonne.

F est donc synthétisable sur Δ_n avec (θ_N) dans la base $x_1x_2'x_3x_4x_5$

Examinons l'opérateur (θ_1)

$$(F^P_{\theta_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Lambda^P_{\theta_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

F est synthétisable sur Δ_n avec (θ_1) dans la base principale $x_1x_2x_3x_4x_5$.

Propriété 2 : Toute fonction booléenne à 2 monômes canoniques est synthétisable avec (θ_1) ou (θ_{N_1}) sur Δ_n dans une base B o γ quelque soit la complémentation β.

Soit β une complémentation pour deux monômes canoniques μ_1 et μ_2 de n variables. Montrons qu'il existe un ordre γ tel que μ_1 et μ_2 soient compatibles aussi bien avec l'opérateur (θ_1) que (θ_N).

- Cas de l'opérateur θ_N. On considère $I_{\theta_N}(F) = F$

On distingue 4 sortes de colonnes :

les colonnes $\binom{0}{0}$ et $\binom{1}{1}$ qui peuvent se mettre où l'on veut.

les colonnes $\binom{0}{1}$ il y en a n_1

les colonnes $\binom{1}{0}$ il y en a n_2

On a un ordre pour lequel μ_1 et μ_2 sont compatibles qui consiste à mettre d'abord les colonnes $\binom{0}{1}$ si $n_1 \geq n_2$ ou bien $\binom{1}{0}$ si $n_2 \geq n_1$.

Exemple :

$$F = \mu_1 + \mu_2$$

$$F^{\beta o \gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

μ_1 et μ_2 sont donnés dans une complémentation quelconque et l'ordre $x_1, x_2, \ldots, x_8$

$$(F^{\beta o \gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\mu_1) \\ (\mu_2) \end{matrix}$$

$$\gamma = x_1 x_4 x_6 x_7 x_5 x_2 x_3 x_8$$

μ_1 et μ_2 sont compatibles dans la base B = β o γ.

- Cas de l'opérateur θ_1. On considère F^{β} ; $F = \mu_1 + \mu_2$

Une solution consiste à mettre d'abord les colonnes $\binom{1}{1}$ puis les colonnes $\binom{0}{1}$ puis les colonnes $\binom{1}{0}$ et enfin les colonnes $\binom{0}{0}$.

Exemple :

$$F^{\beta o \gamma} = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$\gamma = x_1 x_2 \ldots x_6 x_7$, β quelconque

$$F^{\beta o \gamma'} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma' = x_4 x_1 x_2 x_5 x_7 x_3 x_6$

$$I^{\beta o \gamma'} = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{pmatrix}$$

μ_1 et μ_2 sont compatibles dans la base β o γ'.

II-3-2 - Cas de 3 monômes

Propriété 3 : Il existe au moins 3 bases différentes dans lesquelles une fonction à 3 monômes canoniques est synthétisable, quelque soit l'opérateur (θ_1) ou (θ_N).

Dans chacune de ces bases l'un des monômes est d'implantation horizontale.

Algorithme de recherche de ces bases :

Soient 3 monômes μ_1, μ_2 et μ_3 et un ordre γ.

. Cas de l'opérateur (θ_1)

On choisit l'un des monômes comme base (μ_1 par exemple). Son implantation est horizontale.

$$\mu_1 = m_1 \ldots m_n = \beta$$

$$d = (d_j) = (m_{j-1} \oplus m_j) = I^P_{\theta_1}(\mu_1)$$

Dans la base B = (βoγ) on a :

$$I^{B}_{\theta_1}(\mu_1) = I^{P}_{\theta_1}(\mu_1) \otimes d = 1(11 \ldots 1)$$

$$I^{B}_{\theta_1}(\mu_2) = I^{P}_{\theta_1}(\mu_2) \otimes d$$

$$I^{B}_{\theta_1}(\mu_3) = I^{P}_{\theta_1}(\mu_3) \otimes d$$

Quelque soit désormais une permutation des indices μ_3 et μ_1 d'une part, μ_2 et μ_1 d'autre part, sont compatibles.

Il reste à rendre compatibles μ_2 et μ_3 ; par permutation d'indices la propriété 2 permet de le faire. On obtient un ordre γ'.

μ_1, μ_2 et μ_3 sont compatibles dans la base $\mathcal{B}' = \beta \circ \gamma' = \mu_1 \circ \gamma'$

On obtient ainsi 3 bases différentes :

$\mu_1 \circ \gamma'$, $\mu_2 \circ \gamma''$, $\mu_3 \circ \gamma'''$ où la fonction $F = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ est synthétisable avec l'opérateur θ_1.

. On procède de même pour l'opérateur θ_N

Application :

Soit $F = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ telle que :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
μ_1 =	1	1	0	1	1	1	0
μ_2 =	1	0	1	1	1	0	0
μ_3 =	0	0	1	0	1	1	0

Cas de l'opérateur θ_N

$$\Lambda^{P}_{N}(F) = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{matrix}$$

Ces monômes ne sont pas compatibles (μ_1 et μ_2 se coupent au rang 3

Choisissons μ_1 comme base

$B = x_1 x_2 x_3' x_4 x_5 x_6 x_7'$

$$I^B_{\theta_N}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^B_N(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dans cette base la fonction $F = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ est synthétisable sur Δ_n avec l'opérateur θ_N.

Cas de l'opérateur θ_1

$$I^P_{\theta_1}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^P_1(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ces monômes ne sont pas compatibles (μ_1 et μ_2 se coupent au rang 4)

Choisissons μ_1 comme base dans cette implantation

$B' = x_1 x_2 x_3' x_4' x_5 x_6 x_7'$

$$I^{B'}_{\theta_1}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette implantation μ_2 et μ_3 se coupent aux rangs 2 et 5.

Levons l'intersection de μ_2 et μ_3 au rang 2 en permutant les indices 2 et 5 (les colonnes 2, 3, 5, 6 sont modifiées).

$$B'' = x_1 x_5 x_3' x_4' x_2 x_6 x_7'$$

$$I_{\theta_1}^{B''}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette implantation μ_2 et μ_3 se coupent au rang 5.

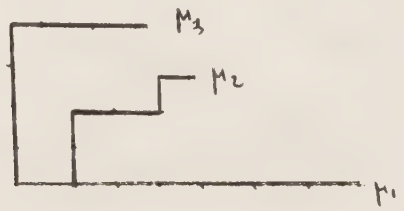
Levons l'intersection de μ_2 et μ_3 au rang 5 en permutant les colonnes 5 et 6 (les colonnes 5, 6 et 7 sont modifiées).

$$B''' = x_1 x_5 x_3' x_4' x_6 x_2 x_7'$$

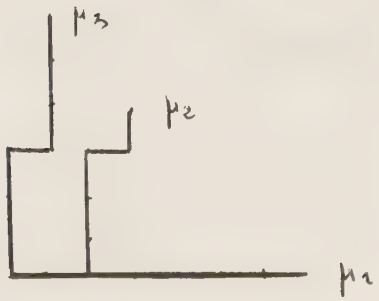
$$I_{\theta_1}^{B'''}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans cette implantation les monômes μ_1, μ_2 et μ_3 sont compatibles.

$I_{\theta_N}^{B}(F) =$



$I_{\theta_1}^{B'''}(F) =$



II-4 - Les fonctions clés de parité $\{f_n\}$ sont synthétisables avec (θ_N) et les fonctions I_θ-1 (f_n) avec (θ_1)

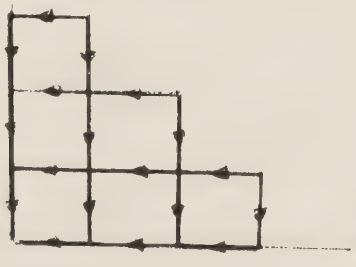
$$f_n \left| \begin{array}{l} = i_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \\ = p_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1 \end{array} \right. \quad \text{ou}$$

Sur Δ_n muni de (θ_N) les rivières, images des monômes canoniques de f_n, sont toutes celles d'extrémités : les points d'abscisses :

0,2,4, ... n ou n-1 (pour p_n)

1,2,5, ... n ou n-1 (pour i_n)

Ex. : Synthèse de $i_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$



On montre que I_{θ_1}-1(f_n) =

$$\left| \begin{array}{lll} x'_{2p} & \text{si } n = 2p \text{ et } f_n = i_n \\ x_{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \quad " \quad " \\ x_{2p} & \text{si } n = 2p \quad f_n = p_n \\ x'_{2p+1} & \text{si } n = 2p+1 \quad " \quad " \end{array} \right.$$

Donc $\boxed{I_{\theta_1}\text{-}1(f_n) = \tilde{x}_n}$

II-5 - L'ensemble des fonctions symétriques S et et leur image $I_\theta(S)$

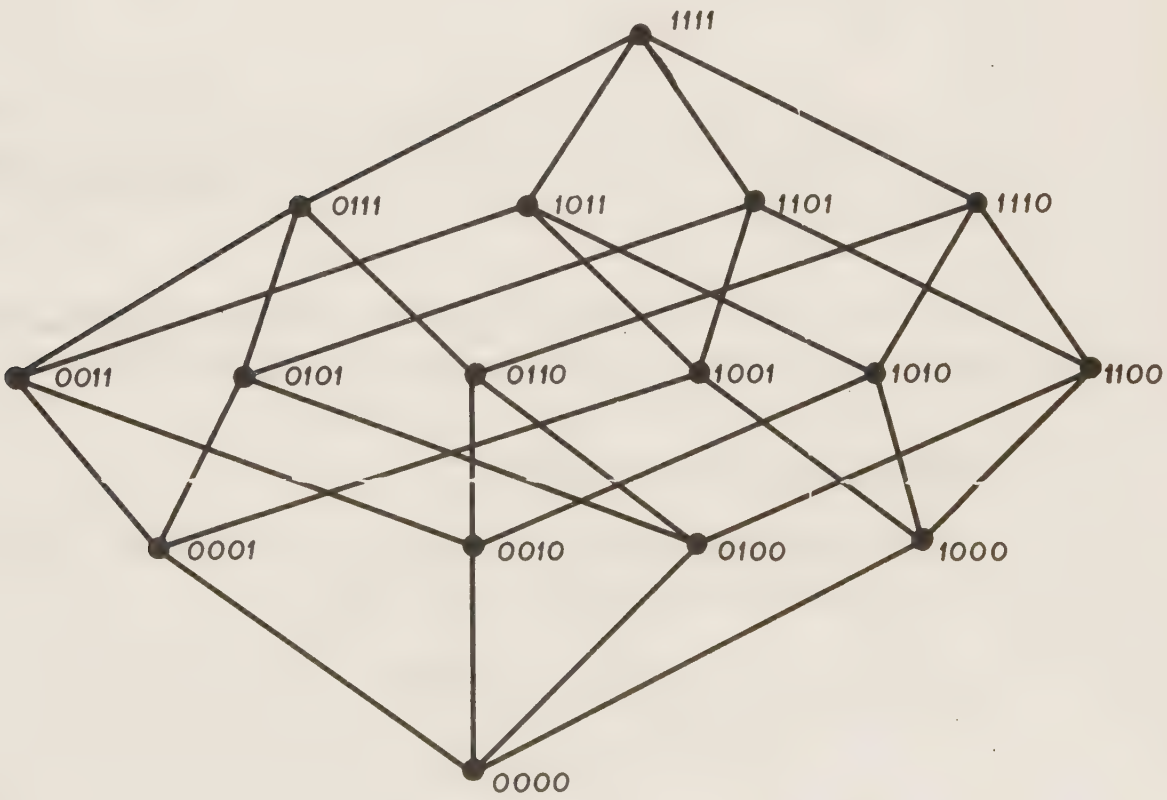
- Fonction symétrique par rapport à un ensemble de variables X (soit p le cardinal de X)

Les 2^n points du treillis de Boole se partagent relativement aux permutations de ces variables en p+1 classes ; chaque classe est l'ensemble des ancêtres d'un élément x de B^n, situés sur un même rang, ou cet élément x lui-même.

Exemple :

Chaque point du treillis de B^n est représentatif d'un monôme canonique :

1001 est image de $x_1x'_2x'_3x_4$



Ensemble des classes C_i de monômes pour les permutations de $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$C_1 = \{1111\}$

$C_2 = \{0111, 1011, 1101, 1110\}$

$C_3 = \{0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100\}$

$C_4 = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$

$C_5 = \{0000\}$

Ensemble des classes C_i pour les permutations de $X = \{x_1 x_3\}$

$C_1 = \{1111\}$

$C_2 = \{0111 , 0111\}$

$C_3 = \{0101\}$

Les fonctions (symétriques par rapport à un ensemble de variables X) formées des monômes d'une seule classe sont dites symétriques élémentaires (par rapport à X).

Les fonctions somme de fonctions symétriques élémentaires (par rapport à X) sont les fonctions symétriques (par rapport à X).

- Synthèse des fonctions symétriques

. L'ensemble des monômes d'une classe pour les permutations d'un ensemble X est synthétisable sur Δ_n muni de l'opérateur θ_N.

Soit $\{\mu_i\}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ les monômes de la classe

$x \quad X \Rightarrow x \quad \mu_i \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, k$

Soient 2 monômes non compatibles sur Δ_n avec θ_N, μ_1 et μ_2 de la classe.

Alors l'ensemble de monômes qui les rend compatibles appartient à la même classe.

Soit i le plus petit indice tel que :

$$\Lambda_{1i} = \Lambda_{2i}$$

Alors les monômes définis par :

$$\Lambda_{21} \cdots \Lambda_{1i}\ \Lambda_{2,i+1} \cdots \Lambda_{2n}$$

$$\Lambda_{21} \cdots \Lambda_{2i}\ \Lambda_{1,i+1} \cdots \Lambda_{1n}$$

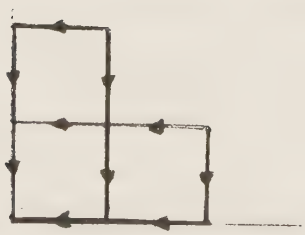
appartiennent à la même classe (car $\Lambda_{2n} = \Lambda_{1n}$) et lèvent l'incompatibilit de μ_1 et μ_2 au rang i.

Et ainsi de suite.

Proposition 1 : L'ensemble des fonctions symétriques élémentaires est synthétisable sur Δ_n avec l'opérateur (θ_N)

Ex. : Soit $F = (x_1 \theta x_2)\ (x_3 \theta x_4) + x_1 x_2 x_3' x_4' + x_1' x_2' x_3 x_4$

$$F_P = I^P_{\theta_N}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Elles correspondent à un quadrillage de Δ_n (voir Caldwell)

Proposition 2 : Les fonctions symétriques par rapport à un ensemble de variables X sont synthétisables sur Δ_n avec (θ_N)

- Soient 2 fonctions s_1 et s_2 symétriques élémentaires par rapport à un même ensemble de variables : X.

Dans le treillis de Boole les images de leurs monômes canoniques sont les éléments de deux rangs r_1 et r_2.

Supposons $r_1 < r_2$

$\forall\ \mu_1 \in r_1 \quad (\mu_1 = \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n)$

$\forall\ \mu_2 \in r_2 \quad (\mu_2 = \tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_n)$

$$\tilde{x}_i \leq \tilde{y}_i$$

Donc si pour un indice $i / \Lambda_{1i} = \Lambda_{2i}$, alors $\forall\ j < i \quad \Lambda_{1j} = \Lambda_{2j}$.

Les monômes μ_1 et μ_2 sont compatibles.

La fonction $s_1 + s_2$ est donc synthétisable sur Δ_n avec (θ_N). D'où la propriété 2 en généralisant à une somme quelconque de fonctions symétriques élémentaires par rapport à un même ensemble de variables.

Remarque :

De nombreux réseaux synthétisent cet ensemble S de fonctions.
L'intérêt est ici de mettre en évidence un ensemble de fonctions synthétisables sur Δ_n avec l'opérateur (θ_1).

Leur synthèse ne "coûte pas chère" vu la localisation des arcs et cellules sur Δ_n.

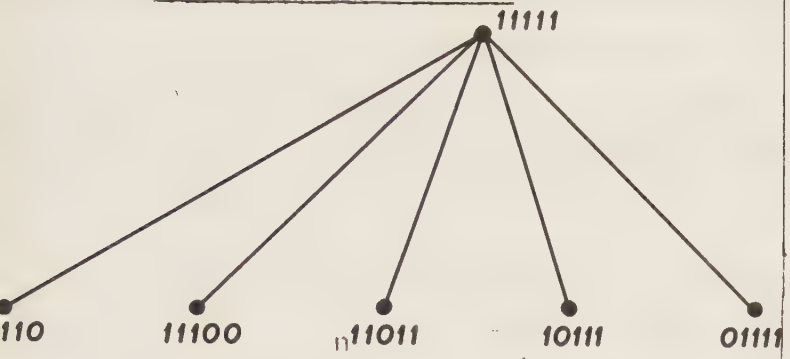
Proposition 3 : Les fonctions appartenant à l'ensemble $I_\theta\text{-}1(S)$ sont synthétisable sur Δ_n avec l'opérateur θ_1.

Images par I_θ-1 de fonctions symétriques particulières

Les fonctions symétriques croissantes

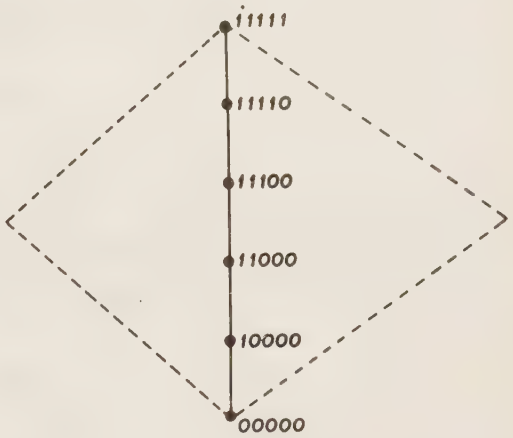
Leurs images par I_θ-1

(1) Celles sui sont représentées dans B_{2n} par l'ensemble des éléments de rang n et n-1



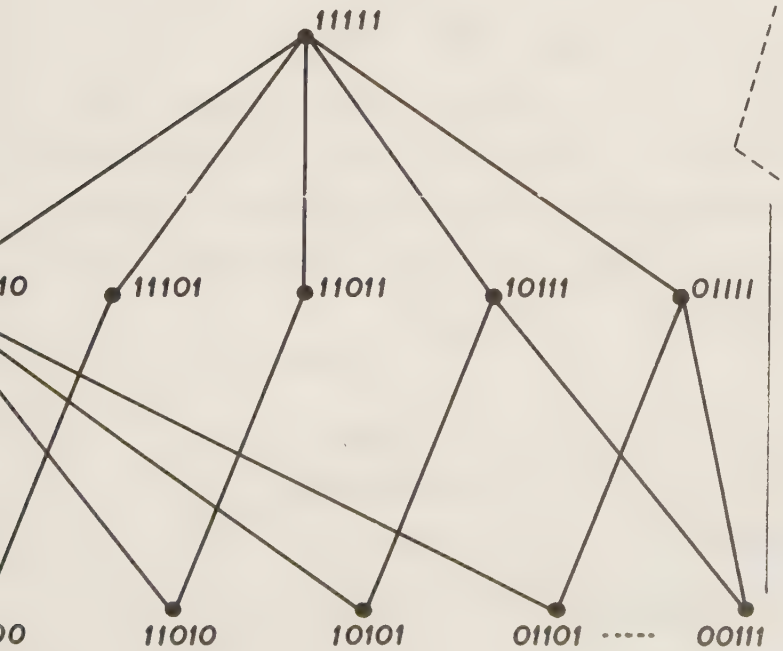
$$F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1\ldots x_{i-1}\hat{x}_i x_{i+1}\ldots x_n$$

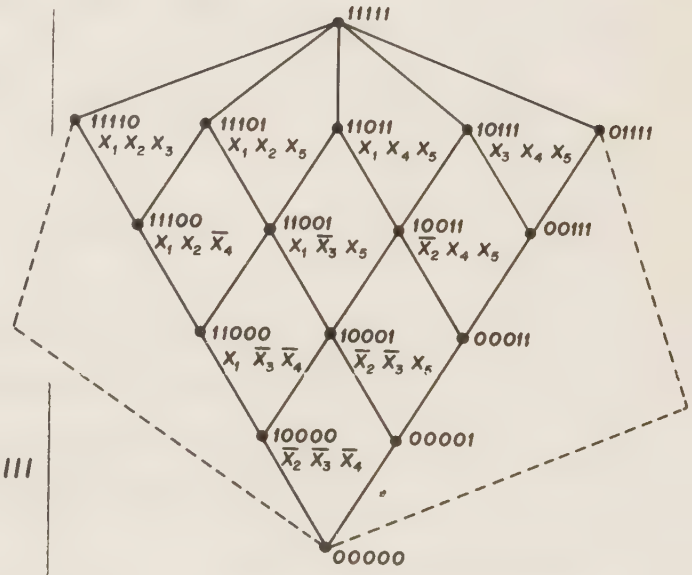
où $\hat{x}_i$ signifie $\tilde{x}_i$ est absent du monôme.



I_θ-1(F) est une chaîne de B_{2n}

(2) Celles qui sont représentées dans B_{2n} par l'ensemble des éléments de rang n, n-1 et n-2.





III - TEST DU RESEAU Δ_n

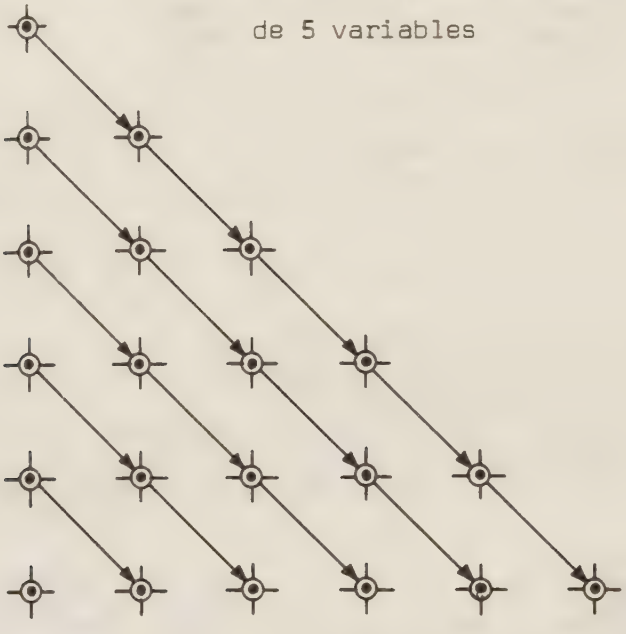
III-1 - Problème du test

III-1-1 - La plaquette

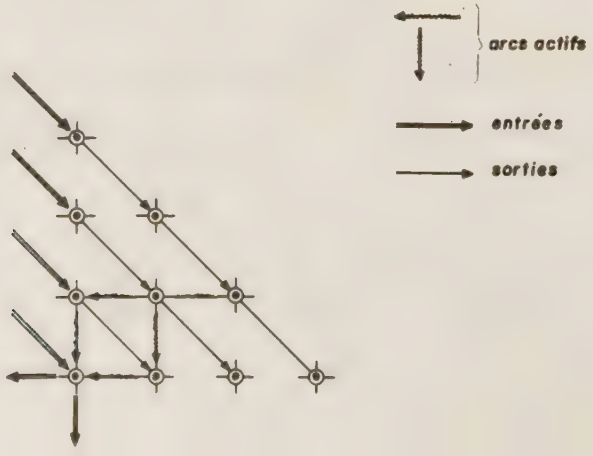
La plaquette initiale, qui sert à la synthèse d'une fonction de n variables, est d'un modèle standard :

de forme triangulaire, elle comporte $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ cellules identiques, implantées, reliées entre elles par des liaisons diagonales destinées à irriguer le réseau avec les variables d'entrées.

Modèle standard de la plaquette pour une fonction de 5 variables



Nous savons que la synthèse se fait à partir de la décomposition canonique de la fonction . Chaque monôme canonique est implanté, par matérialisation de son chemin image, à l'aide de liaisons verticales et horizontales. Ces liaisons sont dites : arcs actifs du réseau.



III-1-2 - Les différents tests au cours de la fabrication

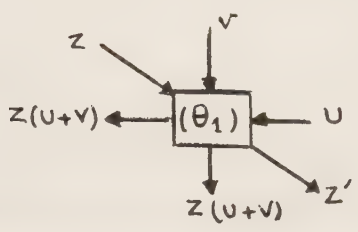
- Test des cellules

Les cellules ont été testées à la fabrication lors de l'assemblage sur la plaquette. A notre niveau nous les supposons donc toutes bonnes.

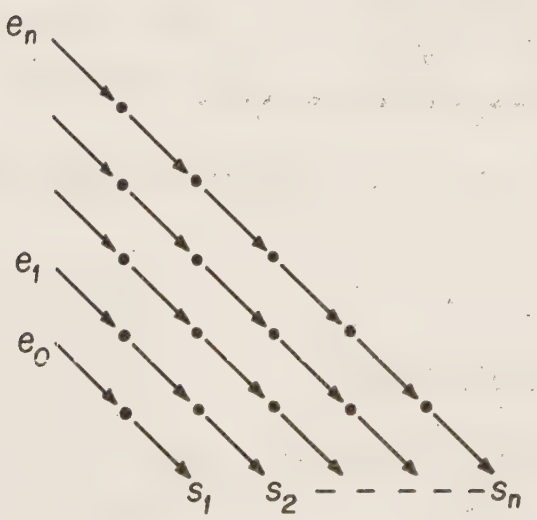
Remarque :

Nous ferons ici choix de l'opérateur θ_1 pour présenter les tests. Une étude similaire pourrait être faite pour l'opérateur θ_N.

Rappel :



- Test des liaisons diagonales



Les séquences d'entrées :

$e_0 \ldots e_n = \begin{cases} 00\ldots000 \\ 11\ldots111 \end{cases}$

doivent produire les séquences de sorties :

$s_0 \ldots s_n = \begin{cases} 10\ldots101 \\ 01\ldots010 \end{cases}$

Si les séquences de sorties obtenues diffèrent de ces séquences prévues, on obtient immédiatement la (ou les) diagonale(s) défectueuse(s).

A ce stade les plaquettes sont testées. Seuls les éléments corrects sont conservés en vue de la synthèse. Nous supposons dorénavant toutes les diagonales correctes.

- Les arcs actifs

Ce sont les liaisons qui seront le sujet de cette étude.

III-1-3 - Couverture d'un écoulement

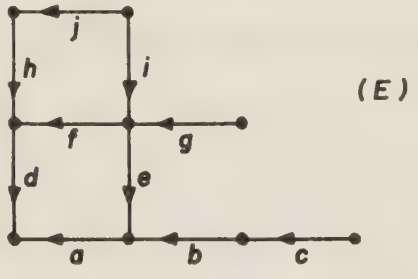
Les arcs actifs du réseau sont le support d'un écoulement E. Une couverture minimale R de l'écoulement E est un ensemble de rivières r_j, j = 1, ..., k, tel que :

$$\bigcup_{j=1}^{k} r_j = E \quad \text{et} \quad \bigcup_{p=1}^{k-1} r_{j_p} \neq E$$

où $\{j_1,\ldots,j_{k-1}\}$ est une permutation de $\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,k\}$

$\hat{i}$: i n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple :



(E)

R = {abc, aeg, dfi, dhj} est une couverture minimale de E.

III-1-4 - Définition des pannes

Les cellules et les liaisons diagonales étant supposées correctes, nous considérons que les pannes sont des collages à "0" ou à "1" d'arcs actifs.

Nous distinguons 3 types de pannes :

- la panne simple, si le réseau comporte un seul collage,
- la panne uniforme, s'il comporte exclusivement des collages à "0" (resp. à "1"),
- la panne multiple s'il comporte au moins un collage à "0" et un collage à "1".

La première question est de savoir si le réseau est opérationnel, il s'agit de la détection de la panne. L'autre question est de localiser la panne en déterminant sa nature.

III-2 - Séquence de test d'un écoulement

Etant donné un écoulement E à tester, considérons une couverture minimale, R de E. Nous allons successivement tester chaque rivière de R jusqu'à la rencontre d'une rivière défectueuse (s'il en existe).

. Test d'une rivière r de R

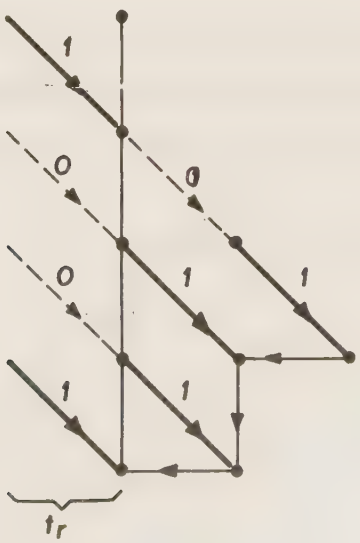
Isolons la rivière r par des "1" aux entrées diagonales de ses cellules : soit v_r ce vecteur.

Soit t_r le vecteur d'entrée diagonale correspondant dans le réseau.

La première composante de t_r (entrée diagonale de la cellule de la première couche) vaut 1.

Un tel vecteur caractérise de façon unique une rivière du réseau : t_r et v_r sont en correspondance biunivoque.

Exemple : Considérons Δ_4



L'implantation de la rivière r est $I_r = 101$.

Il lui correspond le vecteur $v_r = 1111$ et le vecteur $t_r = (1)001$

La première composante de t_r est "1" quelque soit r.

t_r est donc définie par les composantes suivantes notées $(t_r)_1, \ldots (t_r)_n$.

I_r est définie par n composantes notées $(I_r)_1, \ldots, (I_r)_n$.

Calcul de t_r en fonction de I_r :

$$(t_r)_1 = (I_r)_1$$

$$(t_r)_{i+1} = \begin{cases} (t_r)_i & \text{si } (I_r)_{i+1} = 1 \\ (t_r)_i & \text{si } (I_r)_{i+1} = 0 \end{cases}$$

. Soit u le vecteur d'entrées horizontales et verticales de la couche externe du réseau Δ_n (celle qui contient n+1 cellules) définie par :

$$u = ((0,0), \ldots, (0,0))$$

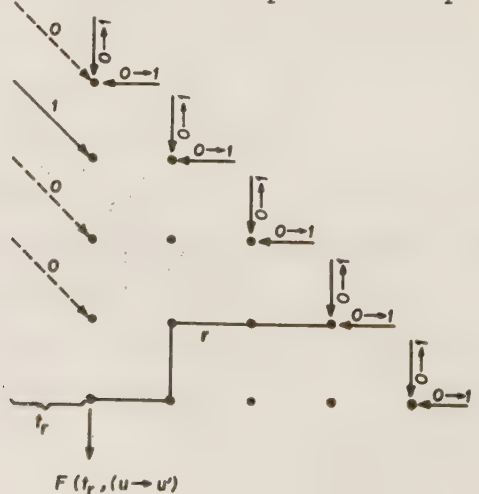
cellule 1 — cellule n+1

Définissons de même u' :

$$u' = ((1,1), \ldots, (1,1))$$

. Opérons sur les cellules de la couche externe de Δ_n le changement $u \to u'$ et considérons les sorties correspondantes de la couche interne (celle qui contient une cellule) : $F(t_r,u)$ et $F(t_r,u')$.

Exemple :



III-2-1 - Détection des pannes

Considérons un écoulement E de Δ_n et une couverture minimale R de E.

Une rivière r est isolée par le vecteur t_r.

La fonction de sortie F dépend uniquement des vecteurs u et u'.

Si $F(t_r,u)$ est différent de $F(t_r,u')$ la rivière r est exempte de pannes .

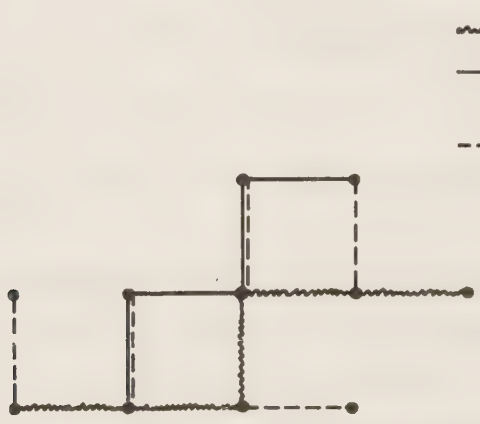
Ceci étant vrai pour toute rivière de E, le bilan de détection est le suivant :

$\forall r \in R \quad F(t_r,u) \neq F(t_r,u') \iff$ E est exempt de panne

III-2-2 - Localisation des pannes

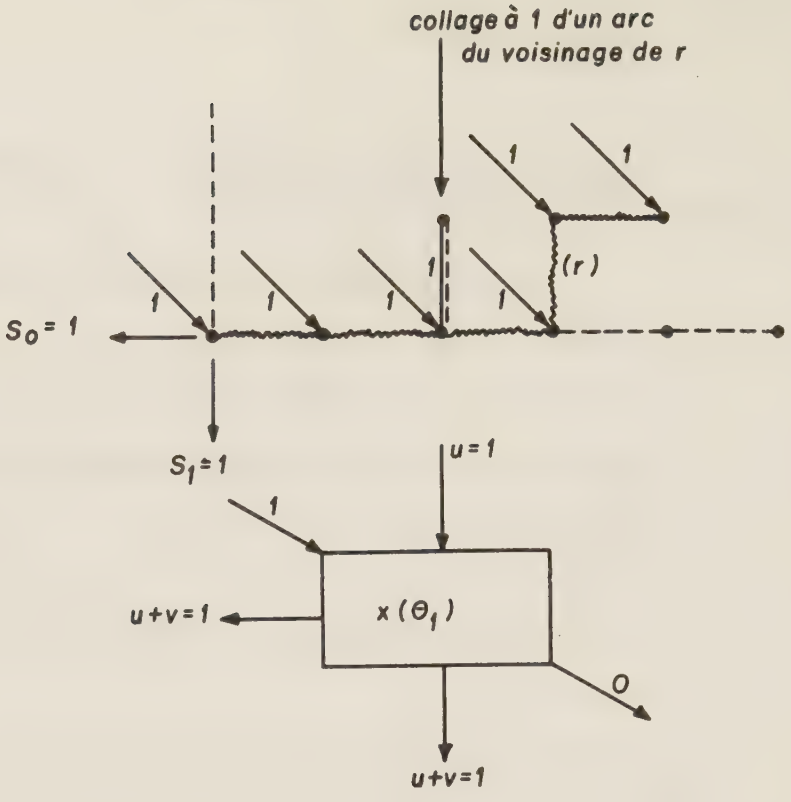
Définition : Le voisinage d'une rivière est l'ensemble des arcs actifs qui lui sont incidents intérieurement.

Exemple :



Grâce au vecteur t_r seuls les arcs de r et ceux de son voisinage sont susceptibles de propager les collages qu'ils contiennent.

Exemple :



S'il n'y a pas de collage à 0 sur r en aval de x, $F(t_r,u) = F(t_r,u') = 1$.

Le collage à 1 du voisinage de r est propagé en sortie.

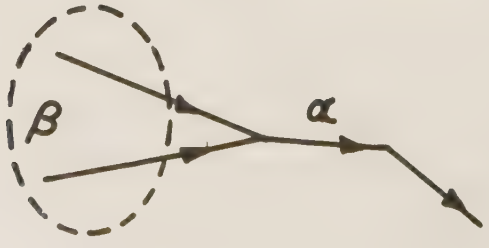
Si dans les mêmes conditions il s'agissait d'un collage à 0 du voisinage de r au lieu d'un collage à 1, il ne serait pas détecté par le test de r.

Pannes couvrant d'autres pannes

i) Soit α une panne simple en couche i.

Soit β une panne quelconque (simple ou multiple) à partir de la couche j, telle que $j > i$.

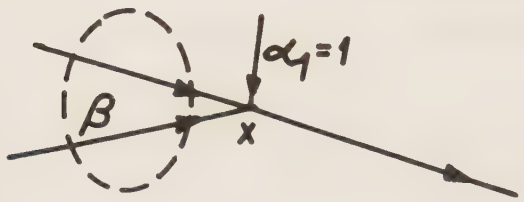
S'il n'existe pas de rivières actives telles que α et β soient sur deux ensembles de rivières disjoints (pour les arcs) alors la panne β ne peut être détectée par les tests précédents : elle est masquée par la panne α.



C'est le cas où tout écoulement de E irriguant β irrigue aussi α.

On a : $\boxed{\beta\alpha < \alpha}$ relativement à la séquence de tests proposés.

ii) Soit β une panne quelconque, telle que tout écoulement irriguant β admette une charnière qui possède un collage à 1 en son voisinage. Soit α_1 ce collage.



x est une telle charnière

Dans ce cas la panne α masque la panne β ; pour les séquences de tests ici proposés on a :

$$\boxed{\alpha_1\beta < \alpha_1}$$

. Nature des pannes

L'écoulement E de Δ_n comporte une panne si et seulement si il existe une rivière r d'une couverture R de E telle que :

$$F(t_r,u) = F(t_r,u')$$

Soit r une telle rivière.

D'après ce qui précède nous sommes amenés à considérer le plus près de la sortie les phénomènes suivants :

a) collage à 0 sur r

b) collage à 1 sur r ou en son voisinage.

Le bilan de localisation est le suivant :

$F(t_r,u) = 1 \iff$ La panne la plus proche de la sortie (sur r ou son voisinage) est un collage à 1 sur r ou son voisinage.

$F(t_r,u') = 0 \iff$ La panne la plus proche de la sortie (sur r) est un collage à 0 sur r.

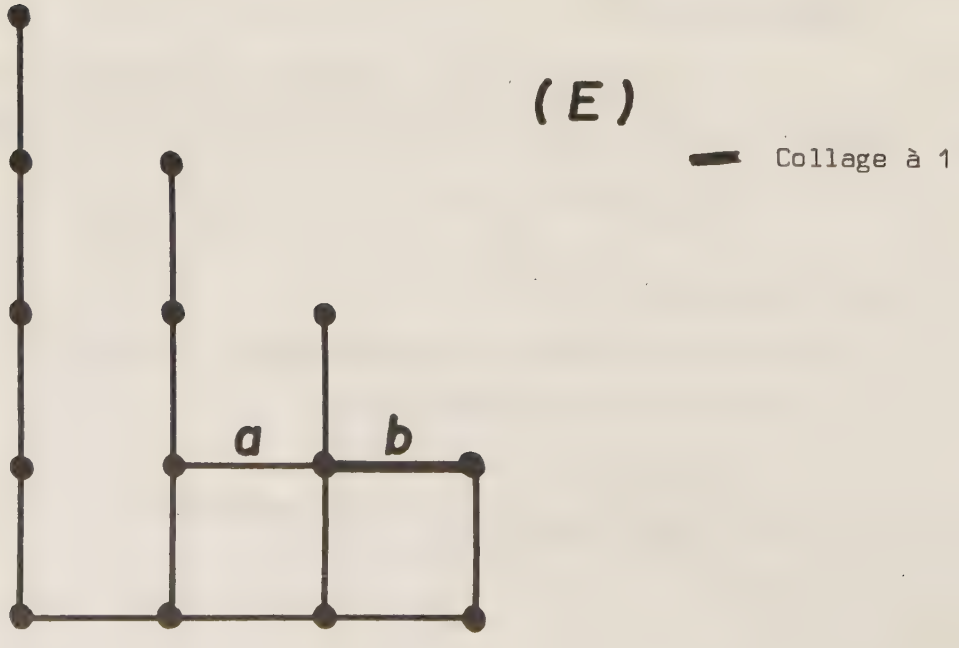
Par tests successifs des rivières de la couverture R de E, nous pouvons espérer localiser de façon de plus en plus fine la position des pannes.

En effet chaque fois que l'on rencontre une rivière r telle que $F(t_r,u) \neq F(t_r,u')$ on en déduit que r est exempt de pannes et que le voisinage de r ne contient pas de collage à 1.

Si la localisation obtenue n'est pas assez fine on peut encore tenter de l'améliorer en testant d'autres rivières de E non contenues dans R. Et, en définitive, on localisera sur chaque rivière la panne la plus proche de la sortie.

Application :

Exemple 1 : Soit E un écoulement de Δ_4 à tester. Supposons que E comporte une panne simple.



Considérons la couverture R de E :

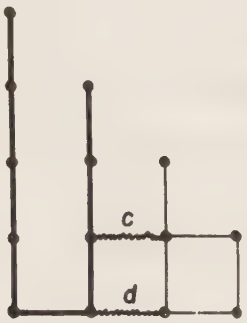
$R = \{r_1 = 0000,\ r_2 = 1000,\ r_3 = 1010,\ r_4 = 1100,\ r_5 = 1110\}$

Test de r_1 et r_2 :

$$F(t_{r_1}, u) \neq F(t_{r_1}, u')$$

$$F(t_{r_2}, u) \neq F(t_{r_2}, u')$$

r_1 et r_2 sont donc exempts de pannes et les voisinages de r_1 et r_2 ne contiennent pas de collage à 1



Après test de r_1 et r_2

arcs exempts de pannes

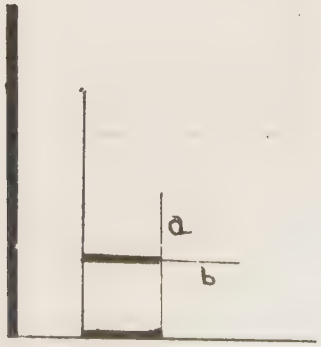
arcs non collés à 1

Test de r_3 :

$$F(t_{r_3}, u) = F(t_{r_3}, u') = 1$$

r_3 ou son voisinage comporte un collage à 1; c et d ne sont pas collés à 0 (donc exempts de pannes).

Après test de r_1, r_2 et r_3 on obtient donc :



liaison valide

a ou b collé à 1

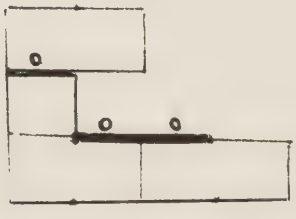
Si l'on sait d'avance qu'il s'agit d'une panne simple, le test des autres rivières n'apportent rien de plus.

Sinon le test de r_5 permet d'affirmer que toutes les liaisons sauf a et b sont valides.

Les tests proposés ne permettent pas de localiser plus finement la panne car toute rivière contenant a admet b en son voisinage et réciproquement.

Exemple 2 : Soit un écoulement E de Δ_5 à tester.

Supposons la panne uniforme.



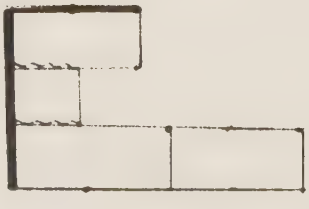
Soit un collage uniforme à 0 dans E.

Considérons la couverture minimale R de E ci-dessous définie :

$R = \{r_1 = 00011,\ r_2 = 00110,\ r_3 = 01010,\ r_4 = 11110,\ r_5 = 11011,$
$r_6 = 10000\}$

Utilisant les mêmes notations que dans l'exemple 1 pour représenter les liaisons valides et l'hypothèse qu'il s'agit d'une panne uniforme, on obtient :

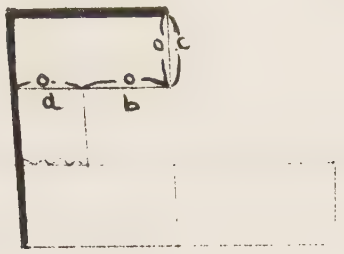
Après test de r_1 :



liaisons valides

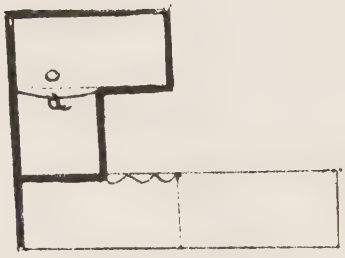
collage à 0 éventuellement, mais pas de collage à 1

puis après test de r_2 :



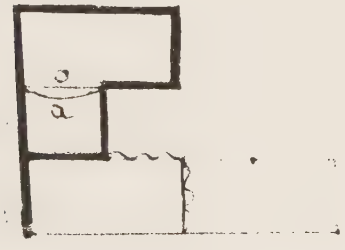
a ou b ou c collés à 0

puis après test de r_3 :

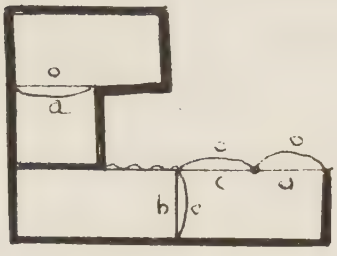


on localise un collage à 0 de a

Le test de r_4 fournit alors :



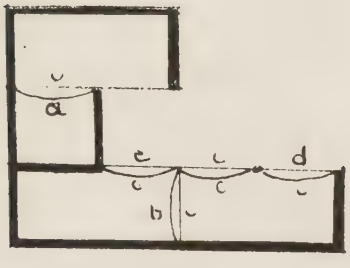
Le test de r_5 :



a collée à 0

b ou c ou d collées à 0

Le test de r_6 :



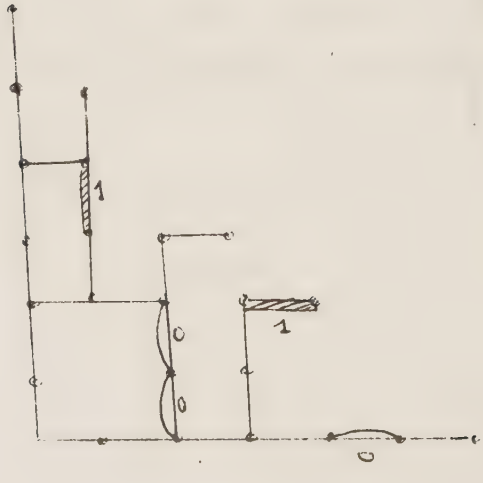
a collée à 0

(e et b) ou c ou d collées à 0

les autres liaisons intactes

La localisation ne peut être plus précise.

Exemple 3 : Traitons le cas d'une panne multiple dans un écoulement E de Δ_6.



collages : 1

: 0

Considérons une couverture minimale de E :

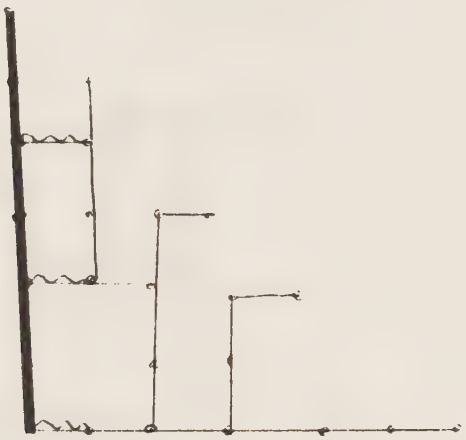
$R = \{ r_1 = 000000,\ r_2 = 000010,\ r_3 = 001000,\ r_4 = 001101,\ r_5 = 110001,$
$r_6 = 111001,\ r_7 = 1111111 \}.$

Rappelons les représentations sur le caractère des liaisons :

liaison intacte — collage à "0"

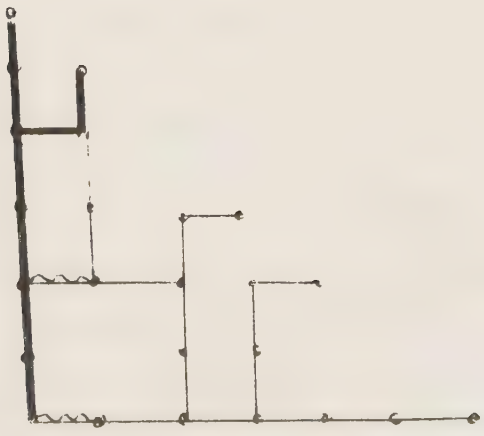
pas de collage à 1 — collage à "1"

Testons r_1 : (Toute liaison de r_1 est valide ; pas de collage à 1 en son voisinage) car $F(t_{r_1}, u) \neq F(t_{r_1}, u')$

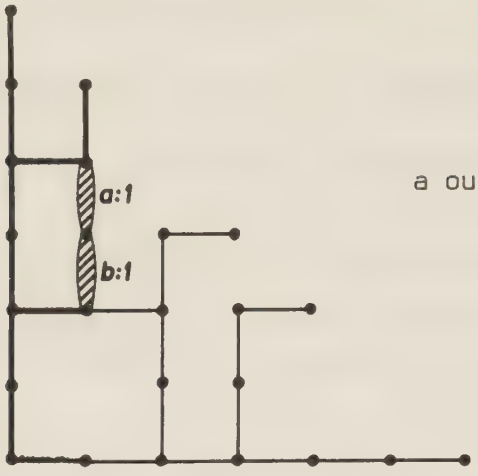


puis testons r_2 : Tout arc de r_2 est valide car

$$F(t_{r_2}, u) \neq F(t_{r_2}, u')$$

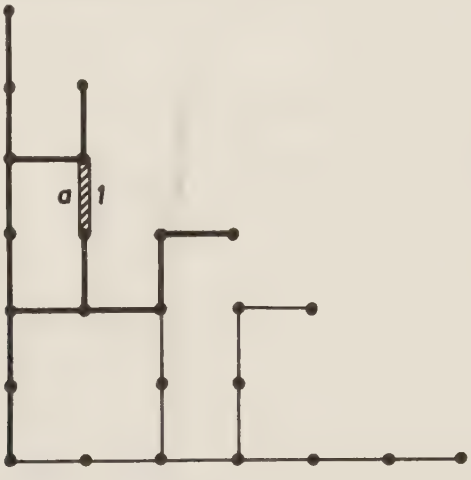


Testons alors r_3 :



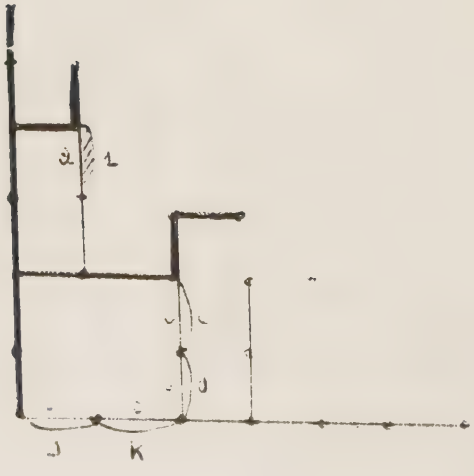
a ou b collées à 1

Testons r_4 : L'arc b est intact ; on localise le collage à 1 de l'arc a.



Testons r_5 : $F(t_{r_5},u) = F(t_{r_5},u') = 0$

Le collage le plus en aval sur r_5 est un collage à 0

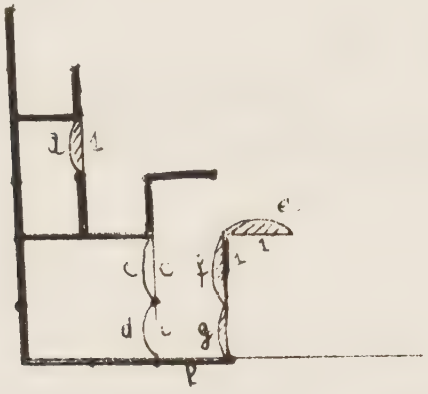


L'un au moins des arcs c, d, j, k est collé à 0 et aucun collage à 1 ne lui succède sur r_5

Testons r_6 : $F(t_{r_6},u) = F(t_{r_6},u') = 1$ ...

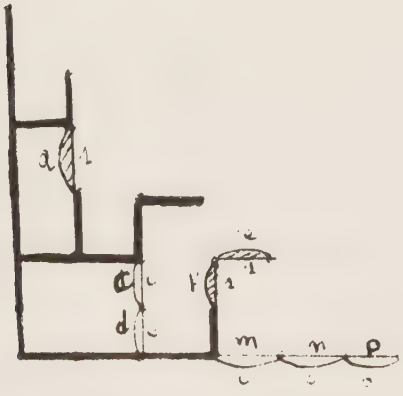
r_6 ou son voisinage comporte une panne et le collage le plus aval est un collage à 1.

D'après ce qui précède (test de r_5) j et k sont intactes ainsi que ℓ.



Testons r_7 : $F(t_{r_7},u) = F(t_{r_7},u') = 0$

r_7 contient une panne. Le collage le plus en avant de r_7 est collage à 0.



Nous arrivons à la conclusion suivante, qui ne peut être améliorée avec nos séquences de tests :

- a est collée à 1.
- c ou d sont collées à 0 et la panne du segment cd la plus proche de la sortie est un collage à 0.
- e ou f sont collées à 1 et la panne du segment ef la plus proche de la sortie est un collage à 1.

. m, n ou p sont collées à 0 et la panne du segment pnm la plus proche de la sortie est un collage à 0.
. Toutes les autres liaisons sont intactes.

La méthode de tests ici proposée permet de détecter la panne d'un réseau quelconque.

Suivant la position des collages dans le réseau elle permet de les localiser plus ou moins finement.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BARBUT M., MONJARDET B.

Ordre et classification - Algèbre et combinatoire. Tomes 1 et 2. Hachette 1970.

(2) BERGE C.

- Théorie des graphes et ses applications. Dunod 1963.
- Graphes et hypergraphes. Dunod 1970.

(3) BIRKHOFF

Lattice theory

(4) BOULAYE G.

Contribution à la théorie des treillis. Thèse, Grenoble 1970.

(5) CHEIN M.

Etude des décompositions d'un réseau. Thèse, Grenoble 1967.

(6) KUNTZMANN J.

- Algèbre de Boole. Dunod 1969.
- Théorie des réseaux (graphes). Dunod 1972.

(7) MONTAGNON J.A.

Synthèses booléennes dans les réseaux cellulaires. Thèse, Grenoble 1970.

(8) REYNAUD J.C., GAROCHE F.

- Treillis des écoulements dans un graphe orienté. Séminaire d'algèbre appliquée et conception. Séance du 26 avril 1971.
- Test d'un réseau de type modulaire. Séminaire A.A.C 1972.

(9) SZASZ G.

Théorie des treillis. Dunod 1971.

(10) TREHEL M.

Bornes dans un ensemble ordonné fini - Produit contracté - Applications. Thèse, Grenoble 1972.